

RESEARCH ARTICLE

Children's Thinking Levels in Composition of Geometric Figures

Min-Jung Kang

Korea National University of Education

기하학적 도형 구성에서 나타난 아동의 사고 수준

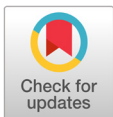
강민정

한국교원대학교

First Author: ice9562kr@naver.com

ABSTRACT

Early geometric learning depends on the child's level of thinking. In order to make geometric learning more meaningful for children, it is important for teachers to provide teaching and learning experiences suitable for children's thinking development level. For this, it is necessary to clearly know the level of thinking about the construction of geometric figures in children. Therefore, in this study, the thinking level of children expressed in geometric figure composition was analyzed. The research results are as follows. First, the percentage of correct answers for the tasks was the highest in the second year of elementary school, and it was a significant difference in the correct answer rate only for the puppy task between kindergarten and second year of elementary school. Second, as for the thinking level of children in the process of constructing geometric figures, kindergarten children aged 5 showed the highest thinking at the picture maker level, and the 1st and 2nd graders of elementary school had the most thinking at the shape composer level. Third, the average movement frequency of tangram piece was the highest at the picture maker level among the thinking levels. Only at the s piece assembler level, there was a significant difference between kindergarten and first-year elementary school students.

Key words : Geometric figures, thinking levels, tangram, child OPEN ACCESSBrain, Digital, & Learning
2022, Vol. 12, No. 1, 37-49.<https://doi.org/10.31216/BDL.20220003>**Received:** March 10, 2022**Revised:** March 19, 2022**Accepted:** March 19, 2022© 2022. Institute of Brain based Education,
Korea National University of Education

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Introduction

아동은 일상생활 속에서 도형에 대한 직관적이고 명확한 지식을 획득한다. 공간과 도형을 연구하는 학문인 기하학은 물리적 환경을 해석하고 반성하는 방법을 제공하며, 수 및 측정과 같은 수학의 다른 부분들을 도와주고 지원한다. 기하학적 세계를 해석하고 이해하며 평가하기 위해서는 공간적 이해가 요구되며 이는 기하학적 지식 구성의 기초이다(NCTM, 2000). 기하학적 지식의 구성은 공간 지식과 기하학적 지식 사이의 관계를 기반으로 하며, 특히 학교에서의 기하학 교육은 공간 관계와 도형을 분석하기 위해 수학 및 논리적 사고를 다룬다(Bryant, 2009; Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). NCTM (2000)은 유아, 취학 전 아동부터 초등 2학년 아동에게 제공되는 기하 학습의 핵심 내용으로 도형, 위치와 공간 관계, 변환과 대칭, 시각화와 공간 추리 및 기하 모델링에 대한 기준을 제시하고 있다.

일반적으로 초등학교 입학 전 아동은 공간과 모양에 대한 기초 개념을 가지고 있으며, 대부분은 외형적 시각을 통해 모양을 인식한다. 4세경 아동은 기본적인 2차원 모양을 인식하고 이름을 말할 수 있으며, 3-6세 아동은 꼭지점에 의존하여 삼각형을 인식한다(Clements & Sarama, 2000). 또한 아동은 삼각형 인식에 있어서 판별 기준으로 수평선이 있어야 하며, 이는 곡선을 가진 삼각형을 잘못된 삼각형의 형태로 판단할 수 있음을 의미한다(Kaur, 2012). 5세경이 되면 정사각형이 직사각형이 아님을 알며, 취학 전 아동의 약 54%가 직사각형을 정확하게 구별하였다. 그리고 초등학교 기간 동안 63%-68%까지 직사각형을 정확하게 구별하였으나 극적인 변화가 나타난 것은 아니었다(Clements, 2004). 이는 도형에 대한 광범위하고 정교한 비공식적 지식이 초등학교 입학 전후에 형성됨을 의미한다. 이처럼 2차원 도형의 개념은 유아기에 형성되기 시작하여 6세부터 안정화된다(Clements & Sarama, 2000). 그러므로 6세 전후에 기하 도형에 대해 배울 수 있는 더 많은 경험을 제공할 필요가 있으며, 이들의 기하학적 도형 구성 과정에서 나타나는 사고 수준을 알아볼 필요가 있다.

van Hiele 부부는 아동의 기하학적 사고를 순차적이고 계층적인 다섯 가지 수준으로 제시하였다. 그리고 취학 전 및 초등 저학년은 1수준인 시각적 수준과 2수준인 기술적 및 분석적 수준에 해당한다고 하였다(Clements & Sarama, 2000; van Hiele, 1986). 한편, 몇몇 연구들(Clements & Sarama, 2011; Clements et al., 1999; Sarama & Clements, 2002)은 1수준인 시각적 수준 이전에 0수준인 전인지적(prerecognitive) 수준이 존재함을 제안했다. 전인지적 수준의 경우 아동은 처음에 기하학적 도형을 인식하나 도형의 시각적 특징 중 일부에만 주의를 기울인다. 따라서 많은 일반적인 도형이 서로 다름을 지각하지만 동일한 범주의 도형을 구별하지는 못한다(Clements et al., 1999). 또한 원, 삼각형, 사각형을 그릴 때 불규칙 곡선으로 그리며, 이에 해당하는 시각적 원형과 아닌 것을 구분하는데 어려움을 보인다(Clements & Sarama, 2000).

1수준인 시각적 수준의 아동은 전체적인 형태에 근거하여 도형을 지각하고 구별한다. 예를 들어 원, 삼각형, 사각형, 평행사변형을 지각하지만, 문처럼 보이기 때문에 직사각형이라고 말한다. 즉 아동은 시각적 원형을 사용하여 전체적으로 도형을 설명하나, 기하학적 속성이나 대표되는 특성에 주의를 기울이지는 않는다. 이처럼 시각적 수준은 형태의 특징 분석을 기반으로 도형의 도식을 형성하며, 이러한 도식이 발달하는 동안 아동은 도형을 구별하기 위해 주로 시각적 일치에 의존한다(Clements, 1999; Clements et al., 1999; van Hiele, 1986).

2수준인 기술적 및 분석적 수준의 아동은 도형의 속성에 따라 분류하거나 단서를 통해 도형을 추측할 수 있다. 또한 도형의 속성을 인지하고 구성요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악할 수 있다(Clements, 1998). 예를 들어 아동은 직사각형은 마주 보는 두 변이 평행하고 길이가 같으며 네 개의 직각을 가진 도형으로 생각할 수 있다(Clements & Sarama, 2000). 즉, 변이나 각의 수를 준거로 분류하고 도형의 속성을 기술할 수 있다. 그러나 동일한 범주 내의 도형들 간 차이나 속성을 서로 연결시키지 못하여 관계를 잘 이해하지 못한다. 이처럼 기하학적 사고 수준은 도형 및 기하학적 관계에 대해 아동이 어떻게 사고하고 추론하는지 그 방식을 설명한다.

그리고 Duval (1995)은 기하 도형에 대한 이해를 지각적, 조작적, 계열적, 추론적 4가지로 구분하였다. 그 중 연령이 어린 아동은 두 가지 유형인 지각적 이해와 조작적 이해로 기하학적 도형 이해를 가르치는 것이 가능하다고 보았다. 지각적 이해는 기하학적 도형의 지각 및 명명하기와 관련이 되며, 조작적 이해는 도형의 재구성에 초점을 두며, 기하학적 구성 요소를 결합하고 분해한 결과를 조사하고 예측하기도 한다. 또한 문제가 제기되면 아동은 자신의 인지능력에 따라 이를 처리하며, 기하학적 문제해결을 위한 인지적 과정을 시각화 과정, 기하학적 배열에 의해 결정되는 구성 과정, 추론 과정으로 보았다(Duval, 2013). 연령이 어린 아동은 시각화 과정을 통해 기하학적 도형에 대한 아이디어를 파악하고, 실생활 경험을 기반으로 물리적 외형으로 도형을 인식한다(Ozerem, 2012). 특히 기하학의 시각화 능력은 수학적으로 관련될 수 있는 모든 도형 단위를 인식하는 능력과 밀접한 관련이 있다(Xistouri, 2014). 즉 기하학에서 중요한 것은 주어진 형태를 구성하고 있는 도형의 단위를 찾는 것이고, 이를 위해서는 한 번 또는 그 이상의 변환의 결과로 얼마나 다양한 도형들이 만들어질 수 있는지 예측할 수 있어야 한다. 연령이 어린 아동은 처음에는 물리적 대상을 조작하고, 그 후에 자신들의 구체적 조작을 심상으로 확장하면서 공간 시각화 능력을 발달시키기 시작한다. 따라서 이러한 능력을 지원하기 위해서는 구체적 자료 및 교육 보조 도구가 필요하다.

아동에게 기하학을 가르치는 가장 효율적인 방법은 실제 경험을 제공하는 것이며 더 많은 시간과 활동을 통해 구체적 자료를 조작하면서 기하학과 공간에 대한 이해를 향상시키는 것이다. 2차원 도형의 수학적 이름과 속성을 통상적으로 암기하는 대신 정신적 참조로 기능하는 교육 보조 도구의 활용은 아동의 수학적 사고를 향상시키는데 도움이 된다(Kang, 2021). van Hiele (1986)는 아동의 공간 및 도형에 대한 효율적 이해를 위해서는 다양한 탐색적 경험이 필요하며, 기하학을 교육할 때 한 수준의 사고에서 다음 사고 수준으로의 전환을 용이하게 하기 위해서는 직접적인 조작의 사용을 강조하였다.

최근 몇몇 연구들(Badger & Medina, 2015; Kang, 2021; Lin et al., 2011; Saleem & Aziz, 2017; Singh, 2004; Tian, 2012)에 의하면, 탱그램은 기하학적 사고와 추론 과정의 발달을 지원하는 효율적인 교육 보조 도구이다. 탱그램은 7개의 조각을 사용하여 다양한 형태를 만드는 것으로 정사각형, 평행사변형, 두 개의 큰 직각 삼각형, 중간 크기의 직각 삼각형, 두 개의 작은 직각 삼각형으로 구성된다(Tian, 2012). 탱그램은 열린 재료로 다양한 용도로 유연하게 사용될 수 있으며, 교육과정 내용 뿐 아니라 놀이를 하면서도 기하학적 도형과 공간적 관계를 탐색할 수 있다. 또한 탱그램은 아동이 도형을 분류, 비교 및 구성하여 기하학적 개념을 개발할 수 있도록 하며 기하학적 맥락에서 문제를 해결하도록 도와준다(Badger & Medina, 2015). 이처럼 탱그램과 같은 구체적 조작 도구는 연령이 어린 학생들이 기하학적 모양을 시각화하고 분석하는데 도움이 되며 동시에 기하학적 사고를 촉진하는 학습 환경을 제공해 준다(Kang, 2021).

구체물을 사용하여 연령이 어린 아동의 기하 도형 구성과 관련된 선행연구들을 살펴보면, Wu & Ma (2006)는 van Hiele의 사고 수준을 바탕으로 연령이 어린 아동의 삼각형과 사각형에 대한 인식 조사에서 14학년은 시각적 사고 수준에 도달한다고 하였다. 34학년 중 일부만이 기하학적 도형을 정의하거나 설명함으로써 기하학적 도형을 식별할 수 있었는데 이는 기술적 및 분석적 사고 수준에 해당한다. Clements et al. (2004)은 만 4세부터 초등 2학년까지 아동을 대상으로 기하학적 도형 구성에서 나타나는 사고 수준의 발달 과정을 7가지로 나누었고, 그 중 연령이 어린 아동의 사고 수준은 처음 네 수준인 전구성자(precomposer), 조각 조립자(piece assembler), 그림 제작자(picture maker), 모양 구성자(shape composer)에 해당하는 것으로 나타났다. 그리고 Hong (2007)이 만 3-5세 아동을 대상으로 기하 도형 합성과 분할의 발달적 수준을 성별과 연령별로 분석하였으나, 연구가 많지 않은 실정이다.

이에 본 연구에서는 아동의 기하 도형 구성에서 나타나는 사고 발달 수준을 알아보고자 하였다. 초기 기하 학습은 아동의 사고 수준에 달려 있다. 사고 수준이 다른 어린 아동은 기하학적 형태를 다르게 인식한다 (Clements et al., 2004; Wu & Ma, 2006). 따라서 아동의 기하 학습을 보다 의미 있게 하기 위해서는 교사가 아동의 사고 발달 수준에 적합한 교수 및 학습경험을 제공하는 것이 필요하다. 이를 위해서는 아동의 기하 학습에 대한 사고 수준을 명확히 알 필요가 있다. 이에 기하학적 도형 구성에서 나타나는 취학 전 및 초등 저학년 아동의 과제 정답률, 사고 수준, 그리고 아동의 행동을 분석하기 위해 조각의 이동 빈도를 조사하였다. 이를 위해 구체적 자료인 탱그램을 활용하였으며, 아동은 주어진 형태를 만들기 위해 조각을 움직여야 한다. 탱그램 조각의 움직임에는 세 가지 동작 즉 반전, 회전, 변위가 나타난다(Renavitasari et al., 2018). 이 세 가지 동작 중 하나 이상을 탱그램 조각에 적용하여야만 주어진 기하 도형을 성공적으로 완성할 수 있다. 아동은 시행착오 과정을 거치면서 기하 도형을 구성할 것이며 이 과정에서 나타나는 행동은 아동의 기하학적 사고 수준에 대한 이해를 가능하게 할 것이다.

Research Methods

Participants

본 연구는 기하학적 도형 구성에서 나타나는 아동의 사고 수준에 대한 연구로 소속기관의 생명윤리위원회(IRB)로부터 먼저 승인을 받고 연구를 진행하였다. 연구대상은 A시에 소재한 공립유치원 취학 전 연령인 만 5세아, 초등학교 1, 2학년인 만 6세와 만 7세 아동을 연구대상으로 하였으며 2개 학급씩 단순무선 표집하였다. 연구를 진행하기 전 해당 교육기관의 담임교사와 학부모에게 연구의 목적, 진행과정, 개인정보 보호에 대해 서면으로 전달하였다. 이에 동의한 아동은 취학 전 아동 23명, 초등 1학년 21명, 초등 2학년 24명이었다. 최종 연구대상은 중도에 그만하겠다는 의사를 표시한 취학 전 아동 2명과 예비검사에 참여한 아동은 제외하였으며, 그 결과 취학 전 16명, 초등 1학년 15명, 초등 2학년 19명으로 총 50명이다.

Instrument and Scoring

아동의 기하 도형 구성에서 나타난 발달적 수준을 알아보기 위해 선행연구들(Clements et al., 2004; Kang, 2020; Saleem & Aziz, 2017; Tho et al., 2020)을 토대로 탱그램 과제를 개발하였다. 본 검사가 이루어지기 전 예비검사를 학년별로 5명에게 실시하였으며 이를 통해 과제 난이도, 소요시간 등을 확인하였다. 예비검사 결과 아동은 수행에 큰 어려움이 없는 것으로 나타났으며, 과제해결 중 조각을 종종 바닥에 떨어뜨려 자석이 있는 탱그램으로 변경하였다. 최종 선정된 과제는 총 4개로 전문가와의 상의를 통해 예비검사에서 아동이 가장 쉽게 해결한 과제 하나를 연습과제로, 나머지 세 개는 본과제로 제시하였다. 최종 탱그램 과제는 물고기, 로켓, 강아지 세 개가 선정되었으며 과제 순서는 무작위로 제시되었다. 과제는 수학교육 전문가 1인과 석사학위를 가진 교사 경력 15년 이상의 유치원 교사 2인, 초등교사 2인에게 내용타당도를 검증받았다.

Table 1. Levels of thinking for composition of geometric figures

Level	Contents
0 Precomposer	Children manipulate shapes as individuals, but are unable to combine them to compose a larger shape (Clements et al., 2004). Children cannot accurately match shapes to simple frames
1 Piece Assembler	Children at this level are similar to Precomposers, but they place shapes contiguously to form pictures (Clements et al., 2004). Children can fill simple frames using trial and error(Mansfield & Scott, 1990; Sales, 1994), but have limited ability to use turns or flips to do so. They cannot use motions to see shapes from different perspectives (Sarama et al., 1996).
1.5 Piece Assembler /Picture Maker	It is in transition process in which the characteristics of Piece Assembler and Picture Maker are mixed (Clements et al., 2004).
2 Picture Maker	Children can concatenate shapes contiguously to form pictures in which several shapes play a single role (e.g., a leg might be created from three contiguous squares), but use trial and error and do not anticipate creation of new geometric shapes (Clements et al., 2004). Shapes are chosen using gestalt configuration or one component such as side length (Sarama et al., 1996). If several sides of the existing arrangement form a partial boundary of a shape, the child can find and place that shape. If such cues are not present, the child matches by a side length. The child may attempt to match corners, but does not possess angle as a quantitative entity, rotating and flipping are used, usually by trial-and-error, to try different arrangements (Clements et al., 2004).
2.5 Picture Maker /Shape Composer	It is in transition process in which the characteristics of Picture Maker and Shape Composer are mixed (Clements et al., 2004).
3 Shape Composer	Children combine shapes to make new shapes or fill puzzles, with growing intentionalities and anticipation, shapes are chosen using angles as well as side lengths (Clements et al., 2004). Eventually, the child considers several alternative shapes with angles equal to the existing arrangement, rotation and flipping are used intentionally to select and place shapes. They can fill complex frames or cover regions (Clements et al., 2004).
3.5 Shape Composer /Substitution Composer	It is in transition process in which the characteristics of Shape Composer and Substitution Composer are mixed (Clements et al., 2004).
4 Substitution Composer	Children deliberately form composite units of shapes and recognize and use substitution relations among these shapes (Clements et al., 2004)

기하 도형 구성에서 나타난 발달적 수준을 알아보기 위해 Clements et al. (2004)의 범주를 근거로 아동의 사고를 수준별로 범주화 하였다. 이들의 연구에 기초하여 본 연구에서도 발달 진행을 0수준부터 3수준까지에 초점을 맞추어 기하 도형 구성에서 나타난 아동 사고의 수준을 범주화하고 분석하였다. 다음은 Clements et al. (2004)의 연구결과를 기초로 수준별 사고에 대한 설명이다.

먼저, 수준 0은 전구성자(Precomposer)로서 도형을 개별적으로 조작하지만 결합하여 더 큰 도형을 만들지는 못한다. 예를 들어 강아지에 대해 하나의 도형만을 사용하면서 기하 도형 구성에 실패한다. 수준 1은 조각 조립자(Piece Assembler)로 그림을 구성하기 위해 연속적으로 조각을 배치하나, 회전이나 뒤집기 사용능력이 제한적이다. 그리고 윤곽선을 무시하고 자유로운 형태로 조각을 놓는다. 수준 2는 그림 제작자(Picture Maker)로 여러 도형이 단일 역할을 하는 그림을 만들기 위해 도형을 연속적으로 연결한다. 예를 들어 조각을 연속적으로 연결하여 로켓의 몸체 부분에 놓는다. 이때 변의 길이와 같은 구성 요소를 사용하여 조각들을 선택한다. 또한 도형의 여러 면이 경계 부분에 해당하면 그 모양을 찾아 놓을 수 있다. 그러나 단서가 없을 경우 한쪽 길이에 일치시키며, 모서리와 일치시키려 시도하나 각도를 맞추지는 못한다. 수준 3은 모양 구성자(Shape Composer)로서 도형의 속성을 기반으로 선택하며, 의도와 예측을 가지고 기하학적 움직임을 사용한다. 도형을 결합하여 새로운 기하학적 단위를 생성하기도 하며, 측면 길이뿐 아니라 각도를 사용하고 선택한다. 그리고 기존의 배열과 동일한 각을 가진 몇 가지 대체모양을 고려하며, 회전과 뒤집기를 의도적, 정신적으로 사용하여 복잡한 프레임을 채울 수 있다. 그리고 한 수준에서 다음 수준으로 발달됨에 있어 각 수준별 사고 특징이 혼재되어 나타나는 것을 전이(in transition) 과정으로 명명하고, /를 삽입하여 표시하였다. 관련된 내용은 Table 1과 같다.

기하 도형을 구성함에 있어서 각 수준별 행동 발생 빈도에 따라 0, 1, 2, 3으로 점수를 부여하였으며, 이를 바탕으로 아동의 사고 수준을 분류하였다(Clements et al., 2004). 0은 해당 수준을 반영하는 행동이 전혀 관찰되지 않은 경우, 1은 해당 수준의 행동이 한 번 관찰되는 경우, 2는 해당 수준의 행동이 두 번 이상 관찰되는 경우이다. 3은 행동이 그 수준에서 지배적으로 나타날 때라고 선행연구에서는 설명하였으나 기준이 명확치 않아 전문가와 상의하여 3번 이상 나타날 때 3점을 부여하였다. 예를 들어, 물고기 과제에서 각 수준별 행동 발생 빈도가 전구성자 수준에서는 전혀 나타나지 않았고, 조각 조립자 수준에서는 2회, 그림제작자 수준에서는 5회, 모양 구성자 수준에서는 1회가 나타난 경우, 각각 0, 2, 3, 1로 점수를 부여한다. 이때 물고기 과제에 대한 기하 도형 구성 사고 수준은 빈도가 5회 지배적으로 나타난 그림 제작자 수준이 된다. 또한 각 수준에서 행동 발생 빈도가 동일하게 나타난 경우는 이를 수준 간 전이 과정으로 명명하였다. 예를 들어, 물고기 과제에서의 행동 발생 빈도 점수가 1수준과 2수준에서 동일한 경우 조각 조립자/그림 제작자로 표시하였다. 그리고 기하 도형 구성에서의 최종 사고 수준은 세 과제에서 가장 많이 나타난 사고 수준이 된다. 예를 들어 물고기 과제가 2수준, 로켓 과제가 3수준, 강아지 과제가 2수준일 경우 아동의 최종 사고 수준은 2수준이 된다. 사고 수준별 예시는 Fig. 1과 같다.

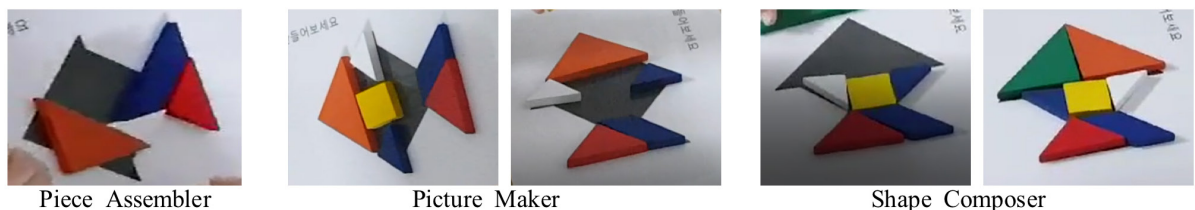


Fig. 1. Examples of Levels of thinking for composition of geometric figures

Data Collect and Data Analysis

탱그램을 활용한 기하 도형 구성에서 나타난 아동의 사고 수준을 알아보기 위해 교육기관의 조용한 곳에서 아동과 개별로 연구가 진행되었다. 과제를 진행하기에 앞서 아동에게 진행 과정 및 유의사항과 과제 수행 중 힘들면 그만둘 수 있음을 설명하였다. 과제는 컴퓨터 화면을 통해 제시되었으며, 화면과 동일한 그림판과 탱그램 조각을 아동에게 제공하였다. 각 과제 해결 시간은 예비검사를 토대로 최대 5분이며, 5분이 초과되면 화면이 자동으로 다음 화면으로 이동된다. 과제 수행에 소요된 평균 시간은 25분 내외였다. 연구자는 이상의 모든 과정을 진행하고 기록하였으며 녹화하였다. 녹화된 자료는 모두 전사되었으며, 전사한 내용은 자료 분석을 위해 석사 학위 이상의 교육경력 15년 이상인 유치원 교사 1인과 초등 교사 1인과 함께 사고 수준에 근거하여 자료를 분석하였다. 평가자간 의견이 서로 다른 부분에 대해서는 토의와 협의 과정을 통해 분석 준거의 합의점을 도출하였으며 최종 평가자간 신뢰도는 92%로 나타났다.

기하 도형 구성에서 나타난 아동 사고의 발달적 수준을 알아보기 위해 먼저 과제별 정답에 대해 평균을 산출하였다. 정답은 1점, 오답은 0점으로 처리하였으며, 전체 과제가 3개이므로 모두 맞다면 3점이 된다. 전체 과제 및 과제별 정답에 대한 학년별 차이를 검증하기 위해 Kruskal-Wallis 검정을 실시하였다. 그리고 전사한 내용을 바탕으로 각 과제에서 나타난 행동 특징을 사고 수준별로 분류하고 그 횟수를 계산하였다. 이후 아동의 최종 사고 수준을 학년별로 빈도분석 하였다. 각 수준별 행동 발생 빈도가 동일하게 나타난 것은 전환 과정으로 그림 제작자/모양 구성자(Pictures Maker/Shape Composer)로 표시하였다. 이상은 선행연구(Clements et al., 2004)에 근거하였다. 또한 아동의 행동을 분석하기 위해 기하 도형 구성에서 나타난 탱그램 조각 이동 빈도를 계산하고 빈도의 평균을 과제별로 산출하였다. 이후 사고 수준에 따라 조각의 이동 빈도를 분류하고, 학년별 차이를 검증하기 위해 Kruskal-Wallis 검정을 실시하였다. 이상의 모든 과정은 SPSS 21.0을 활용하였다.

Results and Discussions

Accuracy Rate in Solving Tangram Tasks

기하 도형 과제 해결에 대한 정답률을 분석하기 위해 전체 과제와 과제별 정답의 평균을 학년별로 산출하였으며, Kruskal-Wallis 검정을 실시하여 학년별 차이를 검증하였다. 분석 결과는 Table 2와 같다.

Table 2. Accuracy rate in solving tangram tasks

Task	Grade	N	M	SD	Aver.Rank	χ^2	p
Fish	Kinder.	16	0.438	0.512	21.94	5.436	0.066
	1st. grade	15	0.467	0.516	22.67		
	2nd. grade	19	0.79	0.418	30.74		
Rocket	Kinder.	16	0.75	0.447	22.25	5.073	0.079
	1st. grade	15	0.867	0.351	25.17		
	2nd. grade	19	1	0	28.5		
Puppy	Kinder.	16	0.563	0.512	20.56	6.994	0.03
	1st. grade	15	0.733	0.457	24.83		
	2nd. grade	19	0.947	0.229	30.18		
Total	Kinder.	16	1.75	1.183	19.97	(0<2)	(0.028)
	1st. grade	15	2.067	0.883	22.23		
	2nd. grade	19	2.734	0.452	32.74		

(): Scheffe

전체 과제의 정답 평균은 취학 전 아동의 경우 1.750, 초등 1학년은 2.067, 초등 2학년은 2.734로 나타났다. 그리고 집단 간 유의한 차이($\chi^2=9.147, p=.030$)가 있는 것으로 나타났으며, Scheffe 사후 검증에서는 취학 전과 초등 2학년 아동에게서 유의한 차이($p=.007$)가 나타났다. 초등 2학년은 피아제의 인지발달 중 구체적 조작기에 해당하는 반면 취학 전 아동은 전조작기에 해당한다. 따라서 취학 전 아동은 직관적으로 과제를 해결하려는 경향이 있는 반면, 초등 2학년은 물리적 조작을 통해 좀 더 논리적으로 과제를 바라보고 해결하면서 정답률이 높게 나타난 것으로 해석된다. 또한 정답의 평균을 살펴보면 초등 1학년 때 정답의 변화폭이 크게 상승한다. 이는 초등학교에 입학하면서 기하학적 사고에 대한 능력이 크게 증가함을 의미하는 것으로, 6세경에 아동의 모양에 대한 개념이 안정적으로 형성된다는 연구결과들(Clements et al., 1999; Clements & Sarama, 2004)과 비슷한 맥락에서 해석이 가능하다.

그리고 과제별 정답의 평균을 분석한 결과, 물고기 과제의 경우 정답률이 .580으로 가장 낮았으며, 강아지 과제는 .760, 그리고 로켓 과제가 .880으로 가장 높았다. Kruskal-Wallis 검정 결과 강아지 과제에서만 집단 간 유의한 차이($\chi^2=6.994, p=.030$)가 있었으며, Scheffe 사후 검증에서는 취학 전과 초등 2학년 아동에게서 유의한 차이($p=.028$)가 나타났다.

강아지 과제는 몸통 부분에 큰 직각삼각형 2개를 합쳐서 평행사변형을 만들어야 과제를 성공적으로 해결할 수 있다. 그러나 취학 전 아동의 경우 정사각형과 직사각형을 구분할 수는 있으나(Clements et al., 1999), 평행사변형은 익숙하지 않은 도형이다. 평행사변형을 완성하기 위해서는 삼각형을 회전하거나 뒤집어야 하는데 이는 직관적 이해를 통해 도형의 위치나 방향을 변환하기가 쉽지 않다. 특히 회전이나 뒤집기를 상대적으로 어려워하는 경향이 있다(Xistouri et al., 2014). 반면, 초등 2학년은 2학년 1학기 수학 교육과정 내에 ‘여러 가지 도형’ 단원이 있다. 이를 통해 평면도형과 입체 도형을 관찰하고 다양한 도형 만들기를 경험하며, 공간 감각과 공간 추론 능력을 기르게 되면서 보다 쉽게 과제를 해결한 것으로 해석된다. 이는 추상적인 개념과 구체적인 대상을 연결하는데 있어 구체적 경험에 많이 노출될 필요가 있음을 강조한 연구결과와 맥을 같이한다(Saleem & Aziz, 2017). 이처럼 다양한 상황에서의 실제 경험은 공간 관계를 인식하고 기하 도형 구성 문제를 해결하는데 도움이 되는 것으로 보인다.

Levels of Thinking in Composition of Tangram Tasks

탱그램 구성 과정에서 나타난 아동의 사고 수준을 살펴보기 위해 사고 수준별로 행동을 분류하고 학년별로 빈도 분석하였다. 관련된 내용은 Fig. 2, Table 3과 같다.

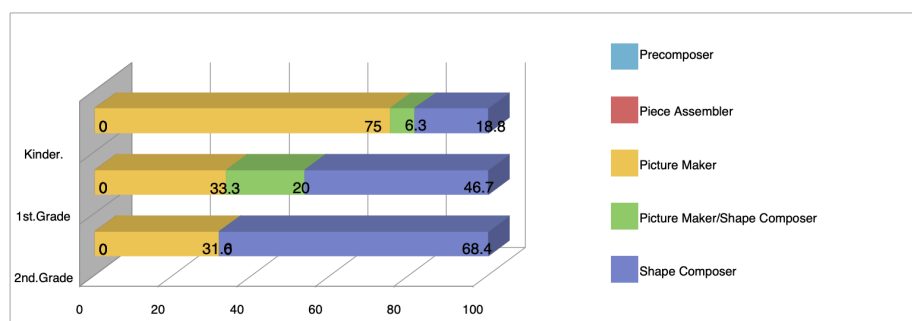


Fig. 2. Levels of thinking in composition of tangram tasks

Table 3. Frequency analysis in primary level scores and transitional level scores

Level	Kinder.	1st. Grade	2nd. Grade
	n(%)	n(%)	n(%)
Precomposer	0(0.0)	0(0.0)	0(0.0)
Piece Assembler	0(0.0)	0(0.0)	0(0.0)
Picture Maker	12(75.0)	5(33.3)	6(31.6)
Picture Maker/Shape Composer	1(6.3)	3(20.0)	0(0.0)
Shape Composer	3(18.8)	7(46.7)	13(68.4)
Total	16(100.0)	15(100.0)	19(100.0)

Table 3에서와 같이 탱그램 과제 구성에서 나타나는 각 수준별 행동을 학년별로 분석하면 취학 전 아동의 경우 그림 제작자(piece maker)의 비율이 75%로 가장 높았으며, 초등 1, 2학년 모두 모양 구성자(shape composer)의 비율이 46.7%, 68.4%로 상대적으로 높게 나타났다.

이는 Clements et al. (2004)의 기하 도형 구성에서 취학 전 아동의 사고가 그림 제작자 수준에서 가장 많이 나타났다는 연구결과와 일치한다. 그러나 미국 초등 1학년은 그림 제작자 수준에서, 초등 2학년은 전환 과정인 그림 제작자/모양 구성자 수준이 많이 나타났다는 결과와는 일치하지 않는다. 즉 우리나라 초등 1, 2학년의 경우 모두 모양 구성자 수준으로 미국 아동보다 기하 도형 구성에 있어서 높은 수준을 보이고 있음을 알 수 있다. 모양 구성자 수준은 시각적으로 전체 모양을 지각하면서 길이와 각도까지 같이 고려하여야만 성공적 기하 도형 구성이 가능하다. 이 수준의 사고 특징은 회전과 뒤집기를 의도적으로 사용할 수 있다는 것이고, 이는 각도를 선택적으로 사용할 수 있음을 의미하는 것이다. 각도는 기하학과 공간 관계 연구의 전환점으로, 각도를 이해하려면 모양을 구분하고 회전의 개념을 알아야 한다(Clements & Sarama, 2004). 아동은 회전과 각도에 대해 직관적 지식을 가지고 있으나, 초등학교에서 모서리, 각도의 크기와 회전의 개념을 학습하기 시작하면서 기하 도형에 대한 사고가 더욱 발달하는 것으로 판단된다. 이처럼 기하 도형 구성은 학년이 증가할수록 초기의 사고 수준은 감소하고 점차 높은 사고 수준으로 발달되고 있음을 알 수 있다.

Movement Frequency of Pieces in Solving Tangram Tasks

기하 도형 구성 과정에서 나타난 아동의 행동을 분석하기 위해 탱그램 조각의 평균 이동 빈도를 과제별로 계산하였다. 그리고 이를 사고 수준에 따라 분류하고, 학년별 차이를 검증하기 위해 Kruskal-Wallis 검정을 실시하였다. 결과는 Table 4와 같다.

Table 4. Movement frequency of pieces in solving tangram tasks

Level	Grade	N	M	SD	Aver.Rank	χ^2	p
Piece Assembler	Kinder.	16	4.75	5.709	35.84	17.933 (0>1)	0.001 (0.001)
	1st. grade	15	0.067	0.258	18.8		
	2nd. grade	19	0.315	0.671	22.08		
Picture Maker	Kinder.	16	23	8.469	30.28	5.811	0.061
	1st. grade	15	23.866	12.744	28.33		
	2nd. grade	19	16.421	9.668	19.24		
Shape Composer	Kinder.	16	11.187	6.564	21.47	2.718	0.257
	1st. grade	15	13.467	3.661	24.73		
	2nd. grade	19	15.421	4.822	29.5		

(): Scheffe

기하 도형 구성에서 탱그램 조각의 평균 이동 빈도는 사고 수준 중 그림 제작자(piece maker)에서 가장 많았으며, 취학 전 아동은 평균 23회, 초등 1학년은 평균 23.866회, 초등 2학년은 평균 16.421회로 나타났다. 조각의 평균 이동 빈도가 각 사고 수준에서 학년별로 차이가 있는지 분석한 결과 조각 조립자 수준에서만 유의한 차이가 있었으며($\chi^2=17.933, p=.001$), Scheffe 사후 검증 결과 취학 전 아동과 초등 1학년에 유의한 차이($p=.001$)가 나타났다.

탱그램 조각의 평균 이동 빈도가 가장 많은 사고 수준인 그림 제작자는 도형 조각을 연속적으로 연결하여 하나의 역할 즉 강아지의 몸통을 만들고, 단서가 되는 모서리 및 측면의 길이를 일치시키면서 도형을 구성한다. 그러나 이 수준의 아동은 아직 각도의 개념을 명확히 획득하지 못하여 가능성이 있는 조각들을 자주 움직이면서 이동 빈도가 증가한 것으로 추론된다. 즉 어느 부분에 어떤 조각을 놓아야 할지 정신적 표상이 어려워 직접적 조작을 통해 모양의 각도와 변의 길이를 확인하면서 탱그램 조각의 이동 빈도가 많아진 것으로 보인다. 이는 시선추적 연구에서 작업 기억 속에서 중요한 정보나 단서를 표상하지 못하였을 때 시선전환 발생 빈도가 높다는 연구결과(Tasi et al., 2012)와 유사한 맥락에서 해석이 가능하다. 이처럼 아동은 다양한 시행착오를 통해 기하학적 모양의 이미지를 재구성해 나가며, 그림 제작자 수준은 각도를 시각적으로 인식할 뿐 그 속성을 완전하게 인식하지 못한다는 점에서 van Hiele의 시각적 수준에 해당한다고 볼 수 있다(Clements & Sarama, 2000).

그리고 조각 조립자(piece assembler) 수준에서 취학 전 아동의 조각 이동 빈도가 초등 1학년보다 유의한 수준에서 많이 나타났다. 기하 도형 구성에서 조각 조립자 수준은 초기 사고 수준으로 윤곽선을 생각하지 않고 자유 형태로 도형을 구성한다. 아동이 도형에 대한 아이디어를 이해하려면 자신의 행동을 체계적으로 조정해야 한다. 그러나 연령이 어린 아동은 도형의 여러 부분을 연관시키기 보다는 한 부분만을 생각하고 의사 결정을 하는 경향이 있으므로 이와 같은 결과가 나타난 것으로 추론된다. 또한 조각 조립자 수준의 사고는 서로 다른 관점에서 도형을 보는데 한계가 있다. 즉 취학 전 아동은 조망수용 능력이 발달되어 가는 과정으로(Shaffer & Kipp, 2010), 다양한 관점에서 도형을 바라보고 그 관점들을 연결하는 능력이 아직 능숙치 못하여 취학 전 아동의 조각 이동 빈도가 초등 1학년보다 상대적으로 많이 나타난 것으로 해석된다. 실제로 조망수용 능력은 공간 능력의 구성요소로 언급되며, 아동의 대칭 능력을 예측한다(Xistouri & Pitta-Pantazi, 2006).

Conclusions

본 연구는 기하 도형 구성에서 나타나는 아동의 사고 수준을 분석하였으며 결론은 다음과 같다.

첫째, 기하 도형 과제에 대한 학년별 정답의 평균을 살펴본 결과 초등 2학년이 취학 전 아동보다 유의한 수준에서 정답률 높게 나타났으며, 과제별 정답은 강아지 과제에서만 초등 2학년과 취학 전 아동에서 유의한 차이가 발생하였다. 아동이 과제를 성공적으로 수행하려면 도형의 개념과 속성을 이해하고, 자신의 행동을 체계적으로 조정할 수 있어야 한다. 초등 2학년은 비슷한 도형을 구별하고 변환을 사용하여 자신의 예측을 확인할 수 있다. 또한 하나의 아이디어를 다른 것과 연결시켜 완전한 형태를 구축하면서 과제를 성공적으로 수행한다. 그러나 연령이 어린 취학 전 아동은 기하학적 도형의 속성을 이해하지 못하고 상하, 좌우 같은 단순한 관계를 시각적으로만 바라보는 경향이 있다. 따라서 전체 이미지를 지각하지만 도형의 여러 부분을 연관시키기 보다는 시각적 특성의 한 부분에만 주의를 기울이고 의사결정 하면서 정답률이 낮아진 것으로 추

론된다. 또한 강아지 과제에서의 경우 이를 성공적으로 구성하기 위해서는 180도 회전이나 수평축의 반사를 통해 윤곽선을 구성할 수 있어야 한다. 5세인 취학 전 아동은 종종 수직축을 따라 이미지를 일치시키거나 잘못된 방향으로 이를 수행한다. 그러나 6, 7세 아동은 수평축을 통해 이미지를 반사하고 대각선 축에서도 이미지를 반사할 수 있다(Sarama & Clements, 2002). 따라서 초등 2학년의 경우 이러한 회전과 반사에 대한 개념 획득이 이루어지고, 도형간의 공간적 속성과 관계를 더 잘 추론하게 되면서 정답률이 높아진 것으로 보인다.

둘째, 기하 도형 구성 과정에서 나타난 아동의 사고 수준을 분석한 결과 취학 전 아동은 그림 제작자 수준에서, 초등 1, 2학년은 모양 구성자 수준의 사고가 가장 많이 나타났다. 취학 전 아동의 그림 제작자 사고 수준은 과제를 완성하기 위해 도형을 연속적으로 연결하고, 측면 길이와 같은 단순한 기하학적 속성을 사용하나 각도 개념을 소유하지 않고 있다. 그러나 아동은 각도에 대해 다양한 생각을 가지고 있으며, 이러한 생각에는 모양, 도형의 측면, 기울어진 선, 방향, 회전, 모서리 및 두 선의 결합 등을 포함한다(Clements, 2004). 따라서 다양한 형태의 모서리를 다루면서 각도의 크기와 회전을 비교할 수 있도록 교육내용을 제공할 필요가 있다.

초등 1, 2학년에서 가장 많이 나타난 사고 수준인 모양 구성자는 도형의 속성을 기반으로 도형을 선택하고, 의도와 예측을 가지고 기하학적 움직임에 사용한다. 측면의 길이 뿐 아니라 각도의 개념을 가진다. 특히 전환 과정인 그림 제작자/모양 구성자 수준을 구체적으로 살펴보면, 취학 전 아동은 6.3%, 초등 1학년은 20%로 그림 제작자 수준에서 벗어나 보다 높은 사고 수준인 모양 구성자로 발달해 가고 있음을 알 수 있다. 반면 초등 2학년에서는 전환 과정의 아동이 없었으며, 약 70% 아동이 모양 구성자 수준에 도달하였고 나머지 약 30%는 그림 제작자 수준에 머물러 있었다. 피험자 숫자가 적어서 결과를 일반화하는데 한계가 있으나, 전환 과정이 없다는 것은 초등 2학년이 기하학적 사고와 공간적 추론에서 발달적 차이가 본격적으로 발생하는 첫 시기임을 추론해 볼 수 있다. 이는 7세 까지 기하학적 사고와 공간추론을 발달시키는 것이 중요하다(Uttal et al., 2013)는 의견을 지지하고 있다. 따라서 이러한 차이를 최소화하거나 발생하지 않도록 초등 1학년 때부터 기하 도형과 관련된 더 많은 학습내용을 교육과정으로 구성하여 다양한 경험을 제공할 필요가 있음을 시사한다.

셋째, 기하도형 구성에서 나타난 탱그램 조각의 평균 이동 빈도는 그림 제작자 수준에서 가장 많이 나타났으며, 조각 조립자 수준에서는 취학 전과 초등 1학년 간에 유의한 차이가 나타났다. 그림 제작자 수준에서는 아동들이 선택하고 버리는(picking and discard) 전략을 사용한다(Clements et al., 2004). 즉 전체적인 형태에서 윤곽선의 여러 면이 도형 조각의 경계와 일치하면 비슷한 조각을 찾아 배치할 수 있다. 그러나 각도 개념이 아직 형성되어 있지 않아 도형 조각들을 선택하여 놓지만 정확하게 맞지 않아 다시 제거하는 전략을 사용하면서 이동 빈도가 높아진 것으로 보인다. 그리고 조각 조립자 수준은 초기 기하 사고 수준으로 조각의 이동 빈도가 그리 많지 않았다. 이 사고 수준은 도형을 연속적으로 배치하나 윤곽선을 무시한 자유로운 형태 구성이 나타난다. 취학 전 아동은 조망수용에 대한 도식이 아직 완전하게 형성되어 있지 않다. 따라서 다양한 관점에서 도형을 보기 위해 방향을 이리저리 돌려볼 수 있는 능력에 한계가 있으며, 이로 인해 자유형태의 그림 만들기 나타난 것으로 추론된다. 그러나 초등 1학년은 기하 도형을 구성할 때 적어도 윤곽선을 맞추어야 한다는 사실을 인지하고 있으며, 조망수용은 정신적 회전과 함께 작동하여 다른 방향으로 표시된 대상을 시각화하도록 지원한다. 즉 초등 1학년은 시행착오를 통해 각도, 방향, 변의 길이 등을 기반으로 기하학적 형태의 이미지를 재구성해 가기 시작한다(Xistouri, 2014). 따라서 조각 조립자 수준의 행동이 나타날 가능성이 더욱 적어지면서 초등 1학년과 취학 전 아동 간 조각 이동 빈도에서 유의한 차이가 발생한 것으로 추론된다.

이상의 결론을 바탕으로 교육적 시사점은 다음과 같다. 첫째, 일반적으로 교사는 도형에 관한 교육경험을 제공할 때 도형의 속성과 특징 보다는 그 이름을 말하는데 초점을 둔다. 자주 가르쳐지는 제한된 경험은 아동이 도형을 이해보다는 암기하게 만든다. 따라서 아동에게 놀이를 통한 다양한 도형들을 제공하고 이들의 속성에 대해서도 관찰할 수 있는 기회를 제공하여 도형에 대한 폭 넓은 이해를 도모할 필요가 있음을 시사한다. 또한 다양한 도형을 접해본 경험은 관련 없는 시각적 영향을 억제하고 도형의 속성에 더욱 주의를 기울이게 할 것이다.

둘째, 아동이 스스로 문제를 해결하기 위해 지각적으로가 아니라 수학적으로 도형을 보는 법을 배울 수 있어야 한다. 지각적 이해는 도형 이해에서 중요하나, 도형을 바라보는 다양한 방식을 차단하는 역할을 할 수도 있다. 따라서 아동의 시각적 유연성을 위해서는 도형의 구성 및 분해와 관련된 국가 수준 교육과정에서의 내용 구성이 필요함을 시사한다.

References

- Badger, T. M., & Medina, E. V. (2015). Puzzles-based learning of mathematics in engineering. *Engineering Education*, 8, 122-134.
- Bryant, P. (2009). Paper 5: Understanding Space and Its Representation in Mathematics. London: Nuffield Foundation.
- Cheng, Y. L., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, 15, 2-11.
- Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the Early Years* (pp. 66-79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. H. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 267-297). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6, 482-488.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 133-148.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192-212.
- Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's compositions of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 163-184.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.
- Duval, R. (2013). The first crucial point in geometry learning: Visualization. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 23-37.
- Kang, M. J. (2020). Brain activation with fNIRS in children's transformational geometry problem solving: Using tangram. *Brain, Digital, & Learning*, 10, 485-497.
- Kang, M. J. (2021). Changes of child's brain activity and functional connectivity in transformational geometry program: An fNIRS study. *Brain, Digital, & Learning*, 11, 199-213.

- Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: Prototypicality and inclusion. *ZDM*, 47, 407-420.
- Hong, H. K. (2007). Young children's developmental levels in ability to compose and decompose geometric shapes. *Early Childhood Education Research*, 27, 165-185.
- Lin, P. C., Shao, Y. J., Wong, H. L., Li, Y. J., & Niramitranon, J. (2011). The impact of using synchronous collaborative virtual tangram in children's geometric. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 10, 250-258.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ozerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Social and Behavioral Sciences*, 55, 720-729.
- Renavitasari, R. D. I., Supianto, A. A., & Tolle, H. (2018). Log data analysis of player behavior in Tangram Puzzle learning game. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, 12, 123-129.
- Saleem, T., & Aziz, S. (2017). Effect of using tangram puzzles on the achievement of students in geometry at primary level. *International Journal of Innovation on Teaching and Learning*, 3, 1-19.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2002). Building Blocks for young children's mathematical development. *Journal of Educational Computing Research*, 27, 93-110.
- Shaffer, R. D., & Kipp, K. (2010). *Developmental Psychology* (8th ed.). Belmont, CA: Cengage Learning.
- Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47, 435-449.
- Tho, C. C., Tuan, V. A., & Dat, T. N. (2020). Potential development geometric thinking for children through Tri Uan, Vietnam *Journal of Education Sciences*, 1, 52-57.
- Tian, X. (2012). The art and mathematics of tangrams. *Bridges 2012: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 553-556.
- Tsai, M. J., Hou, H. T., Lai, M. L., Liu, W. Y., & Yang, F. Y. (2012). Visual attention for solving multiple-choice science problem: An eye-tracking analysis. *Computers & Education*, 58, 375-385.
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139, 352-402.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.
- Wu, D. B., Ma, H. L. (2006). The distributions of Van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th Graders. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 409-416. Prague: PME.
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. *Proceedings of PME*, 30, 425-432.
- Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D., & Gagatsis, A. (2014). Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. *Proceedings of Relime*, 17, 149-164.

Author Information

Kang, Min-Jung: Korea National University of Education, Lecturer, First Author