

RESEARCH ARTICLE

Effects of Teaching Multiplication based on Double Tape Diagram and Double Scale Models on Multiplicative Thinking of Elementary School Students

Jeong-mi Park¹ · Kwangho Lee¹

¹Korea National University of Education

이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도가 초등학생의 곱셈적 사고에 미치는 영향

박정미¹ · 이광호¹

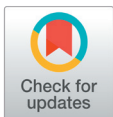
¹한국교육대학교

*Corresponding Author: paransol@knue.ac.kr

ABSTRACT

The purpose of this study is to analyze the level of multiplicative thinking among second-year elementary school students and to understand the impact of teaching multiplication using double tape diagram and double scale models on students' multiplicative thinking. To this end, a theoretical consideration provided a utilization method applied with double tape diagram and a double scale models, which was applied to teaching multiplication to analyze changes in students' multiplicative thinking levels. The analysis showed that students at the additional thinking level accounted for the largest percentage when classified as qualitative thinking level, additional thinking level, transitional thinking level, and multiplicative thinking level. We also confirm that teaching multiplication using double tape diagram and double scale models positively affected students' multiplicative thinking. Through this, we propose the introduction of double tape diagram and double scale models to help students improve their multiplicative thinking as an implication for improving the teaching multiplication of second-year elementary school students.

Key words: Multiplicative thinking, double tape diagram, double scale models



OPEN ACCESS

Brain, Digital, & Learning
2021, Vol. 11, No. 4, 617-629.

<https://doi.org/10.31216/BDL20210039>

Received: September 01, 2021

Revised: November 09, 2021

Accepted: November 16, 2021

© 2021. Institute of Brain based Education,
Korea National University of Education



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Introduction

초등학교에서 자연수의 사칙연산은 후속 학습의 중요한 기초이므로 자연수의 사칙연산에 대한 개념 이해를 명확하게 하는 것은 매우 중요하다. 특히 곱셈은 학교 수학에 걸친 많은 주제를 배우는 데 필수적인 개념이며, 구체적인 맥락에서 곱셈의 적절성을 인식하지 못하는 것이 넓이, 비례, 대수의 초기 개념과 같은 더 발전된 주제를 다루는 데, 상당한 어려움을 유도할 수 있으며, 알고리즘을 약화하고 다양한 상황과 맥락에서 곱셈을 경험할 기회를 주어야 함을 강조하고 있다(Anghileri & Johnson, 1992, pp. 157-158). 그러나 지금까지의 우리나라 초등학교에서 이루어지고 있는 곱셈 개념 도입과 곱셈구구 지도는 배열과 묶음을 통한 반복 덧셈과 배 개념 및 곱셈구구를 암기하는 것을 위주로 이루어질 뿐 학생들의 곱셈 개념 발달을 위한 다양한 곱셈 상황, 곱셈 지도 모델, 특히 곱셈 성질과 곱셈 전략에 대한 연구 결과들이 반영되지 못한 채 지도되어 왔다(Jung, 2013).

곱셈의 의미를 이해하고 능숙하게 사용하기 위해서는 학생들이 곱셈적 사고(multiplicative thinking)를 해야 할 필요가 있다. 곱셈적 사고란 덧셈을 하는 데 필요한 사고와 구별되는 곱셈의 이면에 있는 사고로, 덧셈적 사고와는 다른 추상화의 수준과 포함관계의 구성을 수반한다(Piaget, 1987). 곱셈적 사고는 초등학교를 포함한 학교수학의 핵심일 뿐만 아니라 그 이후의 수학에서도 중요한 초석이 된다.

이와 관련하여 Kim (2010)은 곱셈적 사고 수준의 학생은 아직 학습하지 않은 비례 문제들을 해결할 수 있음을 밝혔다. 따라서 학생들에게 곱셈을 처음 도입하는 시기부터 곱셈적 사고를 형성할 수 있도록 지도할 것을 주장하였다(Kim, 2010).

한편, 곱셈 지도에 있어 시각적 모델 사용의 중요성을 강조한 Jung (2013)은 미국, 네덜란드, 독일에서 직선 모델을 강조하는 것과는 대조적으로 우리나라에서 묶음 모델과 배열 모델을 주로 사용하는 것에 문제가 있음을 설명하였다. 또한 직선 모델은 학생들 스스로 곱셈 전략을 생각하고 이를 표현하는데 효과적인 모델이라 주장하였다.

이러한 직선 모델 중 하나인 띠가 수학 학습에서 어떤 역할을 하는지 Murata (2008)는 1학년부터 6학년까지의 일본 수학교과서를 분석하였다. Murata는 시각적 모델을 반복적으로 제시하는 것이 학생들이 수학을 이해하도록 돕는 도구가 될 수 있다고 주장하였다. 하지만 우리나라 수학교과서를 분석해 보면, 띠와 수직선의 도입이 다른 나라에 비해 늦을 뿐만 아니라 이중 척도 모델을 5~6학년에서만 제시하고 있어 저학년부터 고학년까지 일관적이고 반복적으로 모델을 제시하지 못하는 한계가 있다.

이에 Seo (2019)는 이중 척도 모델은 두 양 사이의 관계를 탐색하여 내포량에 대해 사고하도록 돕고, 이를 바탕으로 각 측정 공간 내에서의 양의 변화 또한 파악할 수 있음을 주장하였다. 따라서 이중 척도 모델은 곱셈적 구조와 관련된 개념을 학습하는 데 유용하게 활용할 수 있을 것이라 강조하였다. 하지만 초등학교 3학년부터 이를 적용하였다는 한계가 있으므로 곱셈이 처음 도입되는 시기인 초등학교 2학년 학생을 대상으로 이중 척도 모델을 개발하고 제시하여 모델의 도입 가능성을 알아보기 위한 연구가 필요함을 제안하였다. 하지만 이러한 다양한 연구결과가 반영되지 못한 채 우리나라 초등학교에서 자연수 곱셈 개념의 학습은 반복 덧셈과 배 개념을 암기하는 것 위주로 이루어져 왔다(Jung, 2013). 이는 학생들의 곱셈 개념 발달을 위한 다양한 곱셈 상황, 곱셈 지도 모델, 곱셈 성질과 곱셈 전략에 대한 연구 결과들이 있으나 현장에서는 이러한 방향의 교수학적 이해가 부족하여 반영되지 못한 채 지도되고 있는 것이다(Jung, 2013). 이러한 곱셈 지도 방법으로 인해 곱셈과 관련하여 학생들이 겪는 어려움에 관한 연구들이 보고되고 있다. 초등학교 1학년부터 5학년

학생들까지의 곱셈적 사고에 대해 살펴본 연구에서 많은 학생들이 덧셈적 사고에 머무르고 있으며 곱셈적 사고로 발전하지 못하고 있다고 보고되었다(Lee, 2001). 또한 Kim (2010)은 곱셈이 처음 도입되는 초등학교 2학년 시기의 학생을 대상으로 곱셈적 사고 수준의 분포를 파악하는 연구가 필요함을 제안하였다.

이러한 연구 배경과 필요성을 바탕으로, 본 연구에서는 초등학교 2학년 학생들의 곱셈적 사고 수준을 조사하고 분석하였다. 또한 이론적 고찰을 통해 이중 테이프와 이중 척도 모델을 적용한 활용 방안을 마련하여 이것을 적용한 곱셈 지도가 학생들의 곱셈적 사고에 어떤 영향을 주는지 알아보았다. 이를 통해 초등학교 2학년 곱셈 지도의 개선을 위한 시사점을 제공하고자 하였다.

Theoretical Background

Multiplicative Thinking

덧셈적 사고는 Fig. 1과 같이 1을 단위로 하여 한 수준에서 연속적으로 사고하며 ‘몇 더’를 사고할 것을 요구함으로써 수평적 포함관계를 형성한다. 반면 곱셈적 사고는 Fig. 2와 같이 ‘1’ 세 개가 ‘3’이라는 한 단위를 형성하고 이러한 단위가 네 개 모여 ‘전체 12’를 이루는 점에서 수직적 포함관계를 형성한다. 이러한 수직적 포함관계는 날개, 묶음, 전체의 세 가지 수준을 포함한다. Fig. 2와 같이 ‘날개’는 곱셈식 $3 \times 4 = 12$ 에서 3에 해당하며 ‘묶음’은 4를, ‘전체’는 12를 의미한다.



Fig. 1. Additive structure to represent $3+3+3+3=12$ (Piaget, 1987, p.78)

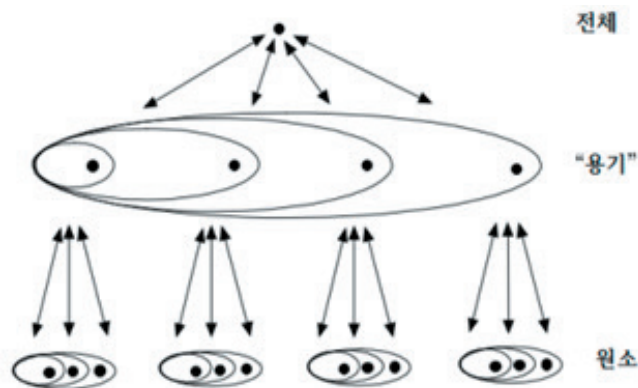


Fig. 2. Multiplicative structure to represent $3 \times 4 = 12$ (Piaget, 1987, p.78)

Steffe (1994)는 학생들이 덧셈적 사고로부터 곱셈적 사고로의 과정을 설명하였다. Steffe는 학생들의 사고 수준을 초기 수 계열(Initial Number Sequence; INS), 내연적 함의 수 계열(tacitly nested number sequence, TNS), 외연적 함의 수 계열(explicitly nested number sequence, ENS)로 구분할 수 있다고 주장하였다. 예를 들어 설명하면, INS 수준의 학생들은 3씩 12까지 수를 셀 때, ‘1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 10, 11, 12’로 수를 세는 덧셈적 사고의 특징을 보인다. 1,2,3에서 3은 수를 세는 행위의 결과만을 의미하며, 수를 셀 때, 합성된 단위를 사용했음을 의미하

는 것은 아니다. 한편, TNS 수준의 학생들은 ‘1, 2, 3 하나; 4, 5, 6 둘; 7, 8, 9 셋; 10, 11, 12 넷’으로 셀 수 있다. 여기서 3은 1, 2, 3과 같이 세어진 결과이기도 하며, 셀 수 있는 하나의 단위이기도 하다. 마지막으로 ENS 수준의 학생들은 3씩 4묶음의 블록이 있을 때 21개의 블록을 만들기 위해서 3씩 몇 묶음이 필요한지를 계산할 수 있다. 즉 ENS 수준의 학생들은 반복 가능한 단위를 형성할 수 있으며, 부분과 전체의 관계를 추론할 수 있다. 따라서 ENS 수준은 곱셈적 사고의 최종 단계라 볼 수 있다.

Double Tape Diagram

이중 테이프는 크기의 단위가 일정한 테이프가 두 가지 다른 범주를 나타낸 것이다(Jo, 2018). 이러한 테이프 도식은 일본의 수학 교과서 내에서 곱셈의 계산, 분수의 곱셈과 나눗셈, 비율 등에서 체계적이고 일관적으로 쓰이고 있는 시각적 표상이며(Tad et al., 2010), 싱가포르 교과서에서 다루는 끈 모양(또는 막대 모양)과도 유사하다. 싱가포르에서는 다른 어떤 모델들보다 이중 테이프를 많이 사용하고 있으며, 그 형태를 살펴보면 Fig. 3과 같이 그림과 결합한 형태로 제시하기도 하고 테이프가 겹쳐지거나 이어진 형태, 삼중 테이프 형태 등 다양한 형태로 제시된다(Park & Lee, 2018).

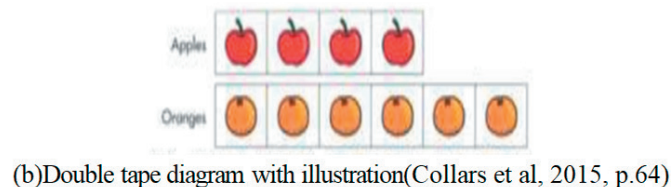
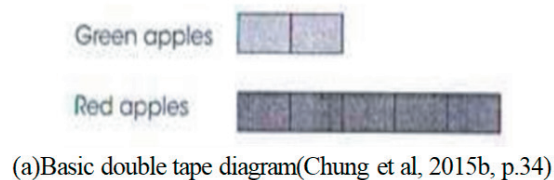


Fig. 3. Double tape diagram of Singapore textbooks

이중 수직선과 마찬가지로 이중 테이프는 동치 비를 나타내기에 유용한 모델이며 두 유형 모두 비례관계에 있는 두 양의 상대적 크기를 시각적으로 나타내는 특징이 있다(Common Core Standards Writing Team, 2011). 이중 수직선은 두 양의 단위가 다를 때 유용하지만 이중 테이프는 비교하는 두 양의 단위가 같은 때 적합하다(Park & Lee, 2018).

본 연구는 초등학교 2학년을 대상으로 한 연구이므로 이중 척도 모델을 도입하기 전 이중 테이프 모델을 제시하여 두 양의 비교를 수월하게 하고 띠 모양을 익숙하게 느낄 수 있도록 하였다.

Double Scale Models

이중 척도 모델은 막대 모델(bar model), 이중 수직선, 비표(ratio table), 행렬 모델로 모델의 위와 아래에 서로 다른 이중의 척도를 사용하는 모델이다(Jung, 2015). 본 연구에서는 Fig. 4와 같이 수직선과 띠를 함께 구성한 형태의 이중 척도 모델을 실험처치 시 제시하였으며, 문제 상황에 따라 수직선에 여러 개의 띠를 함께 구성한 경우도 있다.

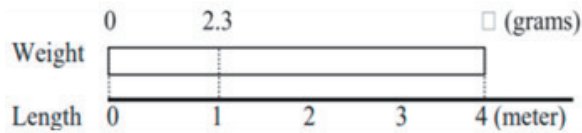


Fig. 4. An example of double scale models(Murata, 2008, pp.380-381)

Murata (2008)는 1학년부터 6학년까지의 일본의 초등 수학 교과서를 분석한 결과, 다양한 형태로 지속적으로 제시된 띠는 학생들이 수학을 이해하도록 돕는 도구가 될 수 있음을 강조하였다. 또한 저학년에서도 시각적 모델에 대한 다양한 경험이 이루어질 수 있음을 확인하였다. 그러나 우리나라는 곱셈 개념 도입이나 곱셈 구구를 지도할 때 구체물의 묶음이나 배열의 시각적 표현에 의존하는 경우가 많고 구조화된 배열 모델과 직선 모델의 사용은 극히 적으므로, 구체물의 시각적 표현에서 출발하지만, 점점 더 구조화된 모델의 사용으로 나아가도록 해야 한다(Jung, 2013).

이중 척도 모델의 활용 방안을 탐색한 Seo (2019)는 이중 척도 모델은 곱셈적 구조의 핵심인 두 측정 공간 사이의 곱셈적 관계와 각 측정 공간 내에서의 곱셈적 관계를 기초적으로 경험할 수 있으므로, 관련단원에서 이를 적극 활용할 것을 주장하였다. 한편 Seo (2019)의 연구는 초등학교 3학년부터 6학년까지의 학생들을 대상으로 한 연구로 곱셈이 처음 도입되는 2학년에 이중 척도 모델의 지도 가능성에 관한 연구가 필요함을 제안하기도 하였다. Kim (2017)은 초등학교 2학년 수학 수업에 수직선 모델의 도입 가능성을 연구하였다. 그 결과, 초등학교 2학년 학생들은 부분과 전체 연산이 가능하고 암묵적 내포 수 계열에 도달하므로 수직선의 도입이 가능함을 시사하였다. 이를 통해 본 연구에서 활용되는 띠와 수직선이 결합한 형태의 이중 척도 모델을 초등학교 2학년에 적용하는 것에 대한 긍정적인 가능성도 확인하였다.

이와 같은 선행 연구 분석을 통해 곱셈 관련단원에서 이중 척도 모델이 적절하게 활용될 수 있음을 알 수 있었고 이에 곱셈이 처음 도입되는 시기인 초등학교 2학년을 대상으로한 이중 척도 모델의 활용 가능성에 관한 연구가 필요함을 알게 되었다. 또한 선행 연구 분석을 통한 이중 척도 모델의 이점과 유의점을 바탕으로 이중 척도 모델을 활용할 수 있는 주제와 이중 척도 모델을 활용한 수업 설계의 유의점을 확인하였다.

Materials and Methods

Participants

본 연구에서는 도시와 농촌으로 지역을 구분하여 각 지역의 학생들이 균등하게 연구 참여자로 선정되도록 도시지역의 A 초등학교와 농촌지역의 B 초등학교 두 곳을 선정하여 연구를 진행하였다. 본 연구에 앞서 충청남도 아산시에 소재한 C 초등학교 2학년 1학급(덧셈과 뺄셈 성취도 검사 26명, 곱셈 검사지 29명 참여)을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 그 후 본 연구는 A 초등학교 2학급(48명)과 B 초등학교 2학급(52명)을 대상으로 진행하였다.

우선 A 초등학교 2학년 실험반과 비교반의 사전 곱셈 검사 결과, 실험반의 평균은 약 1.96, 비교반의 평균은 약 2.13이었다. 이에 대해 통계적으로 유의미한 차이가 있는지 검정한 결과, Levene의 등분산 검정에 의하여 두 집단의 등분산을 가정할 수 있으며($F = .147, p = .704$), 곱셈 검사에 대한 이해도에서 유의미한 차이가 없

는 것으로 나타나($t = .720, p = .475$) 두 집단의 곱셈적 사고 능력 수준이 비슷함을 확인하였다. 또한 덧셈과 뺄셈 성취도 검사에서는 실험반의 평균이 약 14.08, 비교반의 평균이 약 14.52였으며, 이에 대해서도 통계적 차이가 있는지 검정한 결과, Levene의 등분산 검정에 의하여 두 집단의 등분산을 가정할 수 있으며($F = .856, p = .360$), 덧셈과 뺄셈 성취도 검사에 대한 이해도에서 유의미한 차이가 없는 것으로 나타나($t = .306, p = .761$) 두 집단의 덧셈과 뺄셈 성취도 수준이 비슷함을 알 수 있었다. 다음으로 B 초등학교 2학년 실험반과 비교반의 사전 곱셈 검사 결과는 다음과 같다. 사전 곱셈 검사에서 실험반의 평균은 약 1.48, 비교반의 평균은 약 1.64였다. 이에 대해 통계적으로 유의미한 차이가 있는지 검정한 결과, Levene의 등분산 검정에 의하여 두 집단의 등분산을 가정할 수 있으며($F = .198, p = .658$), 곱셈 검사에 대한 이해도에서 유의미한 차이가 없는 것으로 나타나($t = .816, p = .418$) 두 집단의 곱셈적 사고 능력 수준이 비슷함을 확인하였다. 또한 덧셈과 뺄셈 성취도 검사에서는 실험반의 평균이 약 12.93, 비교반의 평균이 약 13.12이었으며, 이에 대해서도 통계적 차이가 있는지 검정한 결과, Levene의 등분산 검정에 의하여 두 집단의 등분산을 가정할 수 있으며($F = .141, p = .709$), 덧셈과 뺄셈 성취도 검사에 대한 이해도에서 유의미한 차이가 없는 것으로 나타나($t = .139, p = .890$) 두 집단의 덧셈과 뺄셈 성취도 수준이 비슷함을 알 수 있었다. 즉, 본 연구에서 선정한 2학년 A 초등학교와 B 초등학교의 실험반과 비교반은 곱셈에 대한 이해 정도가 서로 유사한 동질집단이라 할 수 있다.

Procedure

본 연구에 앞서 곱셈적 사고의 의미와 곱셈적 사고의 수준, 이중 테이프의 활용, 이중 척도 모델의 활용에 관한 선행연구를 살펴보았다. 이를 바탕으로 학생들의 곱셈적 사고 수준 분석을 위한 곱셈 검사지와 성취도 검사지를 개발하였고, 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도를 위한 차시별 교수·학습 과정안과 수업에 필요한 자료, 학생용 활동지를 제작하였다(Appendix 1). 또한 검사지의 신뢰도를 높이기 위해 본 검사의 연구 참여자와 비슷한 수준인 C 초등학교 2학년 1개 학급을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사를 통해 서술형 문항에 대한 학생의 반응, 검사진행 시 유의 사항, 소요 시간 등 예비 검사 실시 과정에서 나타난 문제점을 수정·보완하여 본 검사 진행에 이를 반영하였다. 본 연구의 참여자인 아산시 소재 A 초등학교와 B 초등학교 2학년 학생들을 대상으로 사전 검사를 실시하였으며, 사전 검사는 곱셈 검사지와 덧셈과 뺄셈 성취도 검사지를 활용하였다. 사전 검사 분석 결과, A 초등학교와 B 초등학교의 각 실험반과 비교반이 동질함을 확인하였다. 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도가 학생들의 곱셈적 사고에 미치는 영향을 알아보기 위하여, 실험반은 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 교수·학습 과정안과 활동지로 곱셈단원을 학습하였고, 비교반은 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서(Ministry of Education, 2015a)로 학습하였다. 이후, 동형의 사후 검사를 실시하여 실험 처치로 인한 곱셈적 사고 수준의 변화를 분석하였다.

Data Collect

본 연구에서 자료를 수집한 과정은 다음과 같다. 먼저 A 초등학교와 B 초등학교에서 각각 실험반과 비교반을 선정 한 후, 7월 2주에 해당반에서 사전 검사를 실시하였다. 사전 검사는 두 집단 간 차이를 확인하기 위한 용도로 곱셈 검사지와 덧셈과 뺄셈 성취도 검사지 두 종류를 개발하였다. 두 종류의 검사지는 2015 개정 교육과정에 따른 수학교과서와 익힘책 지도서에 제시된 문항을 바탕으로 제작하였으며 사전 검사지와 사후 검사지는 숫자만 다르게 개발하였다. 그리고 교수 1인 및 현재 초등수학교육 전공 중인 초등교사 7인에게 각 검

사지의 타당도를 검토 받았다. 타당도를 검토한 검사지는 예비검사를 실시하였으며 배 개념에 대한 문항 신뢰도(Cronbach's α) 0.673, 전체-부분 개념에 대한 문항 신뢰도 0.811, 덧셈과 뺄셈 성취도 문항 신뢰도 0.879를 확보하여 두 검사지 모두 문제와 문제간의 관계가 유의미 한 것으로 분석되었다. 검사는 같은 일시에 각 학교 2학년 실험반과 비교반 담임 교사의 감독하에 시행되었고 검사 시간은 각 검사지별 40분으로 제한하였다. 7월 3주에는 본 실험을 위하여 실험반과 비교반 교사들에게 연구에 대한 전반적인 설명과 진행방법을 안내 하고 실험 처치에 대한 의견을 조율하였다. A 초등학교는 7월 4주, B 초등학교는 8월 3주부터 2주에 걸쳐 총 5 차시의 수업을 각 학급에서 진행하였다. 실험반 교사들은 이중 테이프와 이중 척도 모델을 적용한 교수·학습 과정안과 활동지, PPT자료를 바탕으로 수업을 진행하였고, 비교반 교사들은 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서(Ministry of Education, 2015a)의 곱셈 단원을 바탕으로 수업을 진행하였다. 마지막으로 A 초등학교는 실험반과 비교반의 수업이 모두 끝난 시점인 8월 3주, B초등학교는 8월 4주에 사전 검사와 동일한 방식으로 사후 검사를 실시하였다. 사후 검사는 두 집단 간 차이를 확인하기 위한 용도로 사전 검사지와 동형의 곱셈 검사지를 활용하였다. 사전·사후 검사를 모두 마친 이후, 실험반과 비교반의 검사지를 수거하여 이를 분석에 활용하였다.

Data Analysis

본 연구에서는 연구에 참여한 학생들의 사전, 사후 검사 결과를 중심으로 자료를 분석하였다. 구체적으로 살펴보면, 사전에 실시한 덧셈과 뺄셈 성취도 검사는 각 문항별로 정답은 1점, 오답은 0점으로 코딩한 후에 SPSS 18.0 통계 프로그램을 사용하여 분석하였다. 한편, 사전·사후 곱셈 검사는 곱셈적 사고 수준 분석틀을 근거로 각 문항을 5점 척도로 설정하였다. 이를 바탕으로 학생들의 곱셈적 사고 수준을 나누어 빈도수와 백분율을 구하였으며, 수준별 학생들의 반응을 예시로 들었다. 곱셈적 사고 수준의 분류는 Kim (2018)의 연구를 참고하여 각 문항의 내용에 맞게 Table 1처럼 수정 및 세분화 하였다.

Table 1. Multiplicative thinking level

Thinking Level	Score	Concept of Times	Part Whole
Qualitative Thinking	1	* Can't solve the problem by addition or multiplication * Write the number of items presented in the article	* Inability to understand the difference between the part and the whole * Just add the numbers presented in the problem
Additive Thinking	2 3	* Express the problem situation additively and calculates the addition incorrectly * Express and solve problem situations additively	* Express the problem situation additively and calculates the addition incorrectly * Express and solve problem situations additively
Transitional Thinking	4	* The expression of the problem situation is multiplicative, but the solution process is solved by addition * When comparing numbers, it is expressed as '~times', but the problem is solved by adding * The relationship is compared using the concept of times, but the number of models is counted incorrectly.	* Express the number of donuts (or muffins) and boxes given in the problem as an expression or picture, and solve the problem by mixing addition and multiplication * Express the problem situation multiplicatively, but confuses the number of donuts and boxes due to incomplete partial whole thinking
Multiplicative Thinking	5	* Knows the concept of times and expresses the relationship multiplicatively * Express and solve problems using multiplication	* Part-to-whole thinking is complete, using multiplication to express and solve problem situations

본 연구의 주목적은 실험 처치에 따른 집단 간 차이를 비교하는 것이므로, 자료 분석에 있어 실험반과 비교반의 사전·사후 검사 결과를 자세하게 비교·분석하는 데 초점을 두었다. 따라서 실험반과 비교반의 사전·사후 곱셈 검사 결과에 대한 대응표본 t검정을 실시하였으며, 구체적으로 문제 유형에 따른 차이를 분석하기 위해 배 개념과 부분-전체 관계 문항에 대한 대응표본 t검정도 실시하였다.

Results

본 연구를 통해 얻은 결과는 다음과 같다.

첫째, 연구 문제 ‘가’인 초등학교 2학년 학생들의 곱셈적 사고 수준은 다음과 같다. 곱셈 문제를 해결하는 과정에서 보인 학생들의 사고 수준은 질적 사고 28%, 덧셈적 사고 57%, 과도기적 사고 2%, 곱셈적 사고 0%의 분포를 보였다. 이를 통해 덧셈적 사고 수준의 학생이 가장 많은 비율을 차지하고 있다는 것을 알 수 있었다.

또한 곱셈 문제 유형에 따라 사고 수준의 분포를 세분화하여 살펴본 결과, 문제 유형에 따라 학생들의 사고 수준 분포에 차이가 있음을 알 수 있었다.

구체적으로, 사전 곱셈 검사지의 ‘배 개념 알기’ 문제에 대한 검사 결과, 덧셈적 사고 수준과 과도기적 사고 수준의 학생이 72%를 차지하였다. 한편 사전 곱셈 검사지의 ‘부분-전체 관계 알기’ 문제에 대해서는 질적 사고 수준과 덧셈적 사고 수준의 학생이 79%의 비율을 차지하는 것으로 분석되었다. 이것은 학생들이 배 개념보다 상대적으로 전체와 부분을 분해하고 합성하는 능력과 일 이상의 합성단위를 인식하는 능력이 부족함을 의미한다.

둘째, 연구 문제 ‘나’인 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도가 학생들의 곱셈적 사고에 미치는 영향은 Table 2와 같이 나타났다. 이중 테이프와 이중 척도 모델을 통해 곱셈을 학습한 A, B 초등학교 실험반 학생들 모두 유의미한 곱셈적 사고 수준의 향상을 보였다. 구체적으로 살펴보면, A 초등학교 실험반의 사전 곱셈 검사의 평균은 2.10점, 사후 곱셈 검사의 평균은 3.10점으로 평균이 1점 향상되었고, 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($t = -4.830, p = .000^{**}$). 또한 B 초등학교 실험반의 사전 곱셈 검사의 평균은 1.46점, 사후 곱셈 검사의 평균은 2.69점으로 평균이 1.23점 향상되었고, 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($t = -5.333, p = .000^{**}$). 즉, 이중 테이프와 이중 척도 모델을 적용한 곱셈 지도가 학생들의 곱셈적 사고 수준 향상에 긍정적인 영향을 주었음을 확인하였다.

곱셈적 사고 수준의 변화를 ‘배 개념’ 문제 유형과 ‘부분-전체’ 문제 유형으로 세분화하여 분석한 결과는 Table 3과 같다. ‘배 개념’ 문항에 대한 사전 곱셈 검사와 사후 곱셈 검사 결과를 비교·분석한 결과, A 초등학교와 B 초등학교 실험반 모두 통계적으로 유의미한 차이가 있음을 확인하였다. A 초등학교 실험반의 사전·사후 곱셈 검사지의 ‘배 개념’ 문제 유형을 분석한 결과, 사전 곱셈 검사의 평균은 2.38점, 사후 곱셈 검사의 평균은 3.57점으로 평균이 1.19점 향상되었고, 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($t = -6.250, p = .000^{**}$). 또한 B 초등학교 실험반의 사전·사후 곱셈 검사지의 ‘배 개념’ 문항에 결과를 살펴보면, 사전 곱셈 검사의 평균은 1.81점, 사후 곱셈 검사의 평균은 2.96점으로 평균이 1.15점 향상되었고, 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($t = -4.274, p = .000^{**}$). 이는 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도가 배 개념으로서 곱셈적 사고 수준에 긍정적인 영향을 주었음을 의미한다.

Table 2. T-test results for the multiplication test paper of each elementary school experimental group

Elementary School	Pre-Test	Post-Test	t	p
A (n=21)	2.10	3.10	-4.830	.000**
B (n=26)	1.46	2.69	-5.333	.000**

Table 3. T-test results for the ‘times idea’ problem of each elementary school experimental group

Elementary School	Pre-Test	Post-Test	t	p
A (n=21)	2.38	3.57	-6.250	.000**
B (n=26)	1.81	2.96	-4.274	.000**

‘부분-전체’ 문항에 대한 사전 곱셈 검사와 사후 곱셈 검사 결과를 비교·분석한 결과, Table 4와 같이 A 초등학교와 B 초등학교 실험반 모두 통계적으로 유의미한 차이가 있음을 확인하였다. A 초등학교 실험반의 사전·사후 곱셈 검사지의 ‘부분-전체’ 문제 유형을 분석한 결과, 사전 곱셈 검사의 평균은 2.19점, 사후 곱셈 검사의 평균은 3.00점으로 평균이 0.81점 향상되었고, 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($t = -2.968, p = .008^{**}$). 또한 B 초등학교 실험반의 사전·사후 곱셈 검사지의 ‘부분-전체’ 문항에 결과를 살펴보면, 사전 곱셈 검사의 평균은 1.46점, 사후 곱셈 검사의 평균은 2.85점으로 평균이 1.39점 향상되었고, 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($t = -5.087, p = .000^{**}$). 즉, 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도가 부분-전체로서 곱셈적 사고 수준을 향상시키는 데 도움이 되었다.

Table 4. T-test results for the ‘part-whole’ problem of each elementary school experimental group

Elementary School	Pre-Test	Post-Test	t	p
A (n=21)	2.19	3.00	-2.968	.008**
B (n=26)	1.46	2.85	-5.087	.000**

Conclusions

본 연구는 초등학교 2학년 학생들의 곱셈적 사고수준을 분석하고 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용한 곱셈 지도가 곱셈적 사고에 미치는 영향을 살펴보았다. 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 도출하였다.

첫째, 이중 테이프와 이중 척도 모델은 배 개념 및 부분-전체의 관계 이해에 긍정적으로 작용하여 학생들의 곱셈적 사고 수준을 향상시키므로 곱셈 단원에서 이를 적극 활용하는 것을 고려해야 한다. 본 연구에서 이중 테이프와 이중 척도 모델의 활용 방안을 적용한 수업을 통해 학생들은 덧셈적으로 표현하던 것에서 배 개념을 포함한 표현으로 향상된 모습을 보였다. 또한 주어진 수를 합성하거나 분해하여 문제를 해결하는 등 부분-전체 관계의 이해에도 도움이 되었음을 확인하였다. 따라서 이중 테이프와 이중 척도 모델을 활용하고 개선하는 연구가 진행되기를 기대한다.

둘째, 학생들의 곱셈적 사고 수준을 정확하게 진단하여 어떤 사고가 부족하고 오류를 나타내는지 분석하여, 이를 바탕으로 교수·학습을 전개할 필요성이 있다. 곱셈적 사고의 중요성을 주장한 연구는 많았으나 곱셈적 사고 수준의 향상을 위해서는 무엇보다 학생들의 곱셈적 사고 수준의 진단이 우선되어야 할 것이다. 이처럼 학생의 수준을 진단하고 오류를 교정하는 것은 관련된 개념에 대한 이해를 깊이 있게 할 수 있고 새로운 개념 형성에 긍정적인 영향을 미친다. 한편, 곱셈적 사고 수준을 정확하게 진단하기 위한 검사 도구가 필

요하다. 이런 측면에서 본 연구에서 사전·사후 검사에서 제시한 ‘배 개념 알기’ 문제와 ‘부분-전체 관계 알기’ 문제로 구성된 곱셈 검사지는 학생들의 곱셈적 사고 수준을 진단하고 분석하는 데 도움이 될 수 있을 것이다.

셋째, 곱셈 지도에 있어 단순히 곱셈하여 문제를 해결하는 상황에서 벗어나 낱개-묶음-전체의 관계를 수반하는 수직적 사고를 경험할 수 있는 상황과 배의 개념을 이해할 수 있는 다양한 상황을 제시하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 이중 테이프와 이중 척도 모델을 적용한 곱셈 지도를 통해 학생들이 다양한 곱셈 상황을 경험할 수 있도록 하였다. 그 결과, 배 개념과 부분-전체 관계를 묻는 문제에 대한 성취도가 실험반 학생들이 비교반에 비해 월등히 높았으며, 실험반 학생들의 곱셈적 사고 수준도 크게 향상되었다. 이와 관점을 같이 하여 Kim & Pang (2013)도 동수누가 위주의 곱셈만을 제시하는 것을 지양하고 다양한 상황을 통해 배의 의미에 주목할 것을 주장하였다.

본 연구가 초등학교 저학년 학생들의 곱셈적 사고 수준을 파악하고, 곱셈 단원에서 이중 테이프와 이중 척도 모델을 도입하고 활용하여 학생들의 곱셈적 사고 수준을 향상시키는 데 작은 도움이 되기를 기대한다.

References

- Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367-385.
- Anghileri, J., & Johnson, D. C. (1992). Arithmetic operations on whole numbers: Multiplication and division. In T. R. Post (Ed.), *Teaching Mathematics In Grades K-8 Research Based Methods* (pp. 157-200). Needham Heights, Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in Terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 17-38.
- Chong, Y. O. (2013). Teaching multiplication with whole numbers in elementary school mathematics - focusing on the introduction of the concept of multiplication and multiplication facts. *School Mathematic*, 15, 889-920.
- Chong, Y. O. (2015). Teaching proportional reasoning in elementary school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 25, 21-58.
- Clark, F., & Kammi, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal of Research in Mathematics Education*, 27, 41-51.
- Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2015). *Shaping Maths Coursebook 6A*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Common Core Standards Writing Team (2011). *Progressions for the common core state standards in mathematics (draft): 6-7, ratio and proportional relationships*. Retrieved from https://commoncoretools.files.wordpress.com/2012/02/ccss_progression_rp_67_2011_11_12_corrected.pdf.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Jo, J. W. (2018). *Effects of Proportional Teaching based on Double Number Line and Double Tape Diagram on Proportional Reasoning Abilities and Attitude*(Unpublished Master's Thesis). Seoul National University of Education, Seoul, Republic of Korea
- Kim, J. W. (2010). *An Analysis on the Multiplicative Thinking and Proportional Reasoning Ability of Third Graders in Elementary School*(Unpublished Master's Thesis). Korea National University of Education, Chungbuk, Republic of Korea.

- Kim, Y. G. (2017). The Utilization of the Number Line on the Elementary School Students' Number Concept Learning(Unpublished Doctoral Dissertation). Konkuk University, Seoul, Republic of Korea.
- Lee, J. J. (2001). Identification of Multiplicative Thinking in Elementary Schoolers - Focused on grades 1-5. (Unpublished Master's Thesis). Korea National University of Education, Chungbuk, Republic of Korea.
- Ministry of Education (2015a). Elementary Mathematics Guidebook 2-1. Seoul: Chunjae Education.
- Ministry of Education (2015b). Elementary Mathematics Guidebook 2-2. Seoul: Chunjae Education.
- Murata, A. (2008). Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 374-406.
- Park, S. Y. & Lee, K. h. (2018). The comparison and analysis of models on ratio and rate in elementary mathematics textbooks - Centering on multiplicative perspectives on proportional relationships and the structure of proportion situations. *Education of Primary School Mathematic*, 21, 237-260.
- Piaget, J. (1987). *Possibility and Necessity*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions*. Dordrecht: D. Reidel Publishing.
- Seo, E. M. (2019). A Study on the Double Scale Models for Elementary Mathematics Instruction(Unpublished Doctoral Dissertation). Korea National University of Education, Chungbuk, Republic of Korea.
- Simon, D., Izard, J., Breed, M., & Virgona, J. (2006). The derivation of a learning assessment framework for multiplicative thinking. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 113-120)*. Prague, Czech Republic: Charles University.
- Sinclair, H. (1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. In L. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming Children's Mathematics Education* (pp. 19-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Steffe, L. (1994). Children's construction of meaning for arithmetical words: A curriculum problem. *Implicit and Explicit Knowledge: An Educational Approach*, 6, 131-168.
- Tad, W., Takahashi, A., & Yoshida, M. (2010). Supporting Focused and Cohesive Curricula through Visual Representations: An Example from Japanese Textbooks. *Mathematics Curriculum: Issues, Trends, and Future Directions* (pp. 131-144).
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Authors Information

Park, Jeong-mi: Korea National University of Education, Teacher of Elementary Mathematics Education, First Author
 Lee, Kwangho : Korea National University of Education, Professor, Corresponding Author

Appendix 1.

1. Learning Contents Using Double Tape Diagram and Double Scale Models

Grade	Chapter	Lesson	Learning Contents
2	First semester 6. Multiplication	2	* Counting in different ways
		3	* Counting in bundles
		4	* Learn how many times 2
		6	* Learn multiplication expressions
		7	* Represent as multiplication expressions

2. Lesson Plan Using Double Tape Diagram and Double Scale Models

차시	주요 내용 및 활동	학습자료
2	* 사과와 토마토의 수를 수직선 위에서 뛰어 세기 * 모형(연결큐브)을 활용하여 사과와 토마토의 수 세기	모형(연결큐브), PPT, 활동지
3	* 딸기의 수를 묶어 셀 때, 구체물을 배경으로 한 테이프 모델 제시 * 구체물을 배경으로 한 테이프 모델에서 테이프 모델로 변환하는 과정 관찰하기	
4	* 2의 2배, 3배, 4배, 5배를 이중 테이프 모델로 알아보기 * 수일리아 준기가 가진 모형의 수를 표현한 이중 테이프 모델 관찰하기 * 도영, 준기, 수일, 연수가 쌓은 모형의 수를 테이프 모델로 바꾸어 표현한 자료를 관찰하고 수직선을 통해 모형의 수가 2배, 3배, 4배임을 확인하기	
6	* 고깔모자 그림과 수직선이 결합한 모델을 관찰하여 고깔모자가 3쌍 6뿔음을 확인하기 * 풍선 그림과 수직선이 결합한 모델을 관찰하여 풍선이 4쌍 7뿔음을 확인하기 * 5개씩 4뿔음인 곰 인형의 그림 > 테이프 모델 > 테이프 모델과 수직선이 결합한 이중 척도 모델로 의 변화 관찰하기	PPT, 활동지
7	* 모델의 점진적인 변화 과정의 관찰을 통해 도넛의 수를 알아보고 테이프 모델과 수직선을 연결하여 생각하기 * 테이프 모델과 수직선을 한꺼번에 표현한 이중 척도 모델의 장점 파악하기	

3. Practical Example of Reconstruction Using Double Tape and Double Scale Model

차시	재구성 의도	실제
2	• 수직선을 활용한 뛰어 세기 • 조작활동을 통한 수 세기	
3	• 구체물을 배경으로 한 테이프 모델 제시 • 구체물을 배경으로 한 테이프 모델에서 테이프 모델로의 변환 과정 관찰	
4	• 이중 테이프 모델을 활용한 2의 배수 제시	