

Analysis of Multiplication Thinking and Academic Achievement on Division through the Application of Non-proportional Model

Seung-Hyub Jwa¹⁾ · Tae-Kwon Son²⁾ · Da-Som Song²⁾ · Kwang-Ho Lee^{*2)}

¹⁾Jeju Baeknok Elementary School · ²⁾Korea National University of Education

비비례 모델 적용을 통한 곱셈적 사고와 나눗셈 학업성취도 향상 분석

좌승협¹⁾ · 손태권²⁾ · 송다솜²⁾ · 이광호^{*2)}

¹⁾제주 백록초등학교 · ²⁾한국교원대학교

<ABSTRACT>

The proportional model and the non-proportional model are suggested in the mathematics curriculum as one of the tools to help mathematical understanding, but in Korea, the arithmetic algorithm is only introduced through the proportional model. This study analyzed the degree of multiplication thinking and division academic achievement of 3rd grade students through the application of proportional and non-proportional models. As a result of the study, the experimental group that applied both the proportional model and the non-proportional model significantly improved the multiplicative thinking level and division academic achievement compared to the comparative group. These results indicate that division learning using the proportional model and the proportional model together is more effective. Through these results, we suggested some conclusions and implications for improving division learning and teaching.

key words : Proportional model, non-proportional model, division, multiplicative thinking

I. Introduction

수학교육의 ‘수와 연산’ 영역은 초등학교 수학의 가장 많은 영역을 차지하고 있으며, 다른 영역을 학습하기 위한 바탕이 된다는 점에서 그 중요성이 꾸준히 강조되어 왔다. 그 중 나눗셈은 다른 기초 연

산과 더불어 수와 연산 영역의 기본이 되며 초등수학을 이해하는 핵심요소이다. 그러나 이와 같은 나눗셈의 중요성에도 불구하고 학생들은 여전히 나눗셈을 이해하고 적용하는데 어려움을 겪고 있다 (Ministry of Education, 2018). 나눗셈은 연산을 형식화 하는 데 있어 다른 기초 연산과는 달리 자릿값이 큰 순서대로 연산이 이루어지며, 뺄셈과 곱셈

* Corresponding Author : Kwang-Ho, Lee, paransol@knue.ac.kr

Received August 28, 2020; Reviewed August 31, 2020 Corrected September 10, 2020; Accepted September 10, 2020

© 2020. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

의 연산과정을 모두 포함하기 때문이다(Rey et al., 2009). 이처럼 기초 연산이 모두 포함된 나눗셈의 연산과정의 특성을 고려할 때, 곱셈과 나눗셈 사이의 연결성은 나눗셈을 숙달하기 위한 핵심요소이며 곱셈의 의미를 이해하는 것은 나눗셈 이해에 긍정적인 영향을 미친다는 것을 의미한다(Reys et al., 2009).

나눗셈 학습에 필요한 곱셈의 의미를 관계적으로 이해하려면 곱셈적 사고(multiplicative thinking)가 동반되어야 한다(Han & Ryu, 2008; Kim & Pang, 2013). 곱셈적 사고란 곱셈의 이면에 존재하는 추상적이고 이차원적인 포함 관계를 구성하는 사고로서 곱셈과 나눗셈 학습의 토대를 이룬다(Han & Ryu, 2008). 그러나 선행 연구들에 따르면 국내 초등학생들의 곱셈적 사고 수준은 그리 높지 않은 것으로 보인다. Lee (2001)는 초등학교 1학년부터 5학년 학생들 대부분이 곱셈적 사고의 하위 수준인 덧셈적 사고에 머무르고 있다고 보고하였다. 또한 Kim & Pang (2013)은 대다수 초등학교 3학년 학생들이 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 함께하는 불완전한 곱셈적 사고를 하고 있다고 지적하였다. 이처럼 국내 초등학교 학생들의 곱셈적 사고 수준은 여전히 미성숙한 수준에 머물러 있으며, 이는 나눗셈 학습을 저해하는 한 요인으로 작용한다. 따라서 나눗셈의 개념적 이해를 위해 곱셈적 사고 수준을 향상할 방안을 마련할 필요가 있다.

비례 모델과 비비례 모델은 나눗셈의 대수적 구조와 개념을 의미 있게 이해하기 위해서 활용되어 온 대표적인 모델들이다. 비례 모델은 크기 간의 비례관계가 유지되므로 아동들이 모델의 길이나 수의 측정을 통해 자릿값 개념을 인식하는 반면, 비비례 모델은 크기 간의 비례관계가 유지되지 않으므로 자릿값을 파악하기 위해 추가적인 인지 과정이 요구된다. 그러나 모델 사용의 목적이 물리적인 속성에 의존하는 것이 아니라 모델 간의 공통적인 추상성을 인식하는 것임을 고려했을 때, 두 가지 모델은 모두 중요하며 기초 연산을 학습할 때 반드시 소개되어야 한다(Reys et al., 2009). 이처럼 연산의 이해를 위해 다양한 모델의 도입이 강조되고 있지만, 현재 우리나라 교육과정에서는 비례 모델만을 이용하여 기초 연산을 학습하고 있다. 그러나 하나의 모델

만으로 수학적 개념을 정확하게 이해하고 추상화하는 것은 매우 어렵다는 것을 고려했을 때(Jordan, 2010; Kim, 2018), 여러 모델의 활용을 통해 모델 간의 공통성을 탐구하여 나눗셈 개념을 이해하도록 도움을 줄 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 비례 모델과 비비례 모델을 적용한 나눗셈 학습이 학생들의 곱셈적 사고 수준과 나눗셈 학업성취도에 미치는 영향에 대해 살펴보았다. 이를 통해 비례 모델과 비비례 모델의 교과서 적용 방안과 학생들의 곱셈적 사고 수준 및 나눗셈 학업성취도 향상을 위한 시사점을 제시하고자 한다.

II. Theoretical Background

1. Multiplicative Thinking

곱셈적 사고의 개념에 대한 논의는 다양한 관점에서 여러 학자들의 연구를 통해 이루어졌으나(Clark & Kammi, 1996), 본 연구에서는 그 중 Piaget와 Steffe의 곱셈적 사고 관점을 살펴보고자 한다.

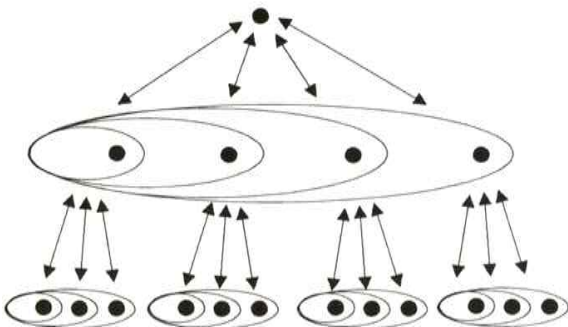
Piaget (1987)는 덧셈과 곱셈 간의 차이를 추상화 수준의 수와 아동이 동시에 만들어야 하는 포함 관계의 수로 보았다. [Figure 1]은 $3 \times 4 = 12$ 의 곱셈식에 대한 덧셈적 표현을 의미한다. 1을 단위로 같은 수준에서 연산이 이루어지므로 이 과정은 하나의 추상화 수준만을 포함한다. 1이 2에, 2가 3에 포함되어 3개를 한 묶음으로 간주하며, 묶음을 하나의 단위로 보고 연산을 하지 못한다는 점에서 일차원적인 수평적인 관계만을 인식한다.



[Figure 1] Additive expression of $3 \times 4 = 12$ (Piaget, 1987, p.78)

이에 반해, 곱셈적 사고는 덧셈적 사고와는 달리 복합적인 추상화 과정과 이차적인 포함 관계를 구성한다. Piaget (1987)는 특히 덧셈과 곱셈의 차이에 주목하여 곱셈적 사고를 상황과 위계적 포섭 관계로 설명하였다. [Figure 2]는 1의 날개 단위 세 개가

3의 묶음 단위 한 개를 형성하고, 3의 묶음을 다른 연산의 단위로 인식하며, 네 개가 전체 12에 포섭된다는 것을 의미한다. 이처럼 곱셈적 사고는 관계의 정신적인 합성과정이며, 덧셈적 사고와 같이 수준의 반복적 포함을 의미하는 것은 아니다. 또한, 모든 포함 관계는 동시에 형성되며, [Figure 2] 속 양방향 화살표는 포함 관계의 양방향성과 동시성을 함께 나타내고 있다.



[Figure 2] Multiplicative expression of $3 \times 4 = 12$
(Piaget, 1987, p.78)

Steffe (1994)는 사고 수준에 따라 수 세기 방법의 과정이 달라짐을 주장하며, 곱셈적 사고의 형성과정을 <Table 1>과 같이 초기 수 계열(initial number sequence), 내연적 함의 수 계열(tacitly nested sequence), 외연적 함의 수 계열(explicitly nested number sequence)의 세 단계로 구분하였다.

초기 수 계열 수준은 덧셈적 사고의 특징을 보여준다. 예를 들어 3씩 15까지 수를 셀 때 1, 2, 3에서 3은 수를 세는 행위의 결과만을 의미한다. 이 수준의 학생들은 3을 경험적으로 합성된 단위로 여기므로 3씩 묶음은 학생들이 셀 수 없는 상위 수준의 단위이다.

내연적 함의 수 계열은 초기 곱셈적 사고의 특징을 보인다. 예를 들어, 3씩 15까지 셀 때 3은 1, 2, 3과 같이 수 세기의 결과이기도 하지만 셀 수 있는 하나의 단위이기도 하다. 따라서 3은 하나의 추상적인 합성 단위로 인식되므로 5를 셀 때, '3의 단위 하나와 1, 2'와 같이 5를 셀 수 있다.

외연적 함의 수 계열은 완전한 곱셈적 사고를 나타내며, 학생들은 3씩 5묶음의 모형이 있을 때 15개의 모형을 만들기 위해서 3씩 몇 묶음이 있어야 하

<Table 1> Steffe's multiplicative thinking (Steffe, 1994)

Level of thinking	Additive thinking → Multiplicative thinking		
	Initial number series	Internal implications Number series	External implications Number series
Composite unit	Empirical Composite unit	Abstract Composite unit	Repeatable Abstract Composite unit
Schema	Pre-multiplicative Schema	Multiplication Schema	Part-to-whole unit adjustment scheme

는지 계산할 수 있다. 이 수준의 학생들은 단위를 반복 가능한 추상적 합성 단위로 바라보며, 부분과 전체의 관계를 조정하고 추론할 수 있다.

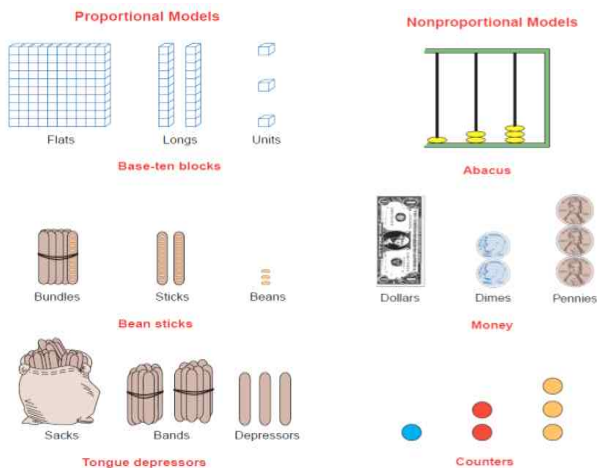
이처럼 Steffe (1994)는 곱셈적 사고가 한순간에 이루어지는 것이 아니라 계열에 따라 이동하는 순차적인 특징을 지닌다고 보았다. 따라서 교사는 학생들이 현재 어느 계열에 있는지를 파악하고 해당 계열에서 다음 계열로 넘어갈 수 있도록 적절하게 개입하여 도움을 제공할 필요가 있다.

2. Proportional and Non-proportional Model

형식적 조작기 이전의 학생들은 수학의 추상성으로 인해 수학 학습의 어려움을 겪는다(Piaget, 1950). 이러한 어려움을 해소하기 위해 수학 학습에서는 수학적 개념을 구체화할 수 있는 모델 도입을 강조해왔다. 상황과 맥락에 알맞은 모델은 수학적 개념과 유의미하게 연결되어 효과적인 수학 학습이 이루어질 수 있도록 도와주기 때문이다(Reys et al., 2009). 따라서 가르치려는 수학적 개념에 알맞은 다양한 모델을 선택하고 학생들로 하여금 개념과 다양한 모델을 연결 짓는 기회를 풍부하게 제공할 필요가 있다(Jordan, 2010).

기초 연산 학습을 위한 모델 중 비례 모델과 비비례 모델은 자릿값 개념 지도를 위해 꾸준히 활용되어 왔다. 비례 모델은 수 모형이나 아이스크림 막대와 같이 수의 크기와 자료의 양이 비례하는 모델

이며, 비비레 모델은 크기와 관계없이 색이나 위치로 수의 크기를 나타내는 모델로서 모의 화폐, 칩, 주판 등을 말한다(Kim et al., 2013). 비레 모델과 비비레 모델의 구체적인 예시는 [Figure 3]과 같다.



[Figure 3] Examples of proportional models & nonproportional models (Reys et al, 2009)

비레 모델과 비비레 모델은 학생들의 자릿값 개념과 수 감각을 향상시킨다는 공통점이 있지만, 비비레 모델은 수의 크기가 모델의 크기와 관련이 없으므로 비레 모델에 비해 추상적이다. 예를 들어, 비레 모델의 십진블록의 경우 십 모형의 크기는 일 모형 크기의 10배이며 백 모형은 십 모형 크기의 10배이므로 크기와 값의 비레 관계가 유지된다. 그러나 비비레 모델인 화폐의 경우 십 원짜리 10개가 백 원짜리 1개보다 크기가 크지만 그 값은 같으므로 비레 관계가 유지되지 않는다. 따라서 학생들이 비비레 모델을 이해하려면 모델 간 교환 관계의 인식이 선행되어야 하므로 비레 모델에 비해 추가적인 인지 과정이 요구된다. 이에 따라 Reys et al. (2009)은 두 모델이 모두 수와 연산 학습에서 중요하지만 수와 양의 비레 관계가 유지되는 비레 모델이 더 구체적이므로 비비레 모델로 이행하기 전에 비레 모델을 확실하게 이해해야 한다고 강조하였다. 또한 형식적 조작기 이전의 학생들은 나눗셈의 형식적 지식을 효율적으로 학습하기 위해 이전에 형성한 비형식적 지식을 활용하는 것이 중요하다(Park & Kang, 2006). 이에 본 연구에서는 여러 가

지 비비레 모델 중 비형식적 맥락이 풍부하고 학생들에게 가장 친숙한 동전 모형을 활용하였다.

III. Method

1. Participants

본 연구를 위한 참여자는 초등학교 3학년 학생들로 선정하였으며, 그 이유는 다음과 같다. 첫째, 2학년 학생들은 비비레 모델을 적용할 때에 모델 간의 관계를 적절하게 이해하는데 어려움이 있으므로 2학년 이후의 학년에서 비비레 모델의 도입이 적절하다(Kang, Lim & Chang, 2015). 둘째, 나눗셈 학습은 3학년부터 시작하므로 학습 초기에 여러 모델의 도입을 통해 학생들이 나눗셈 개념의 공통적인 추상성을 인식하는 것이 무엇보다 중요하기 때문이다. 연구 참여자는 J시에 소재한 A초등학교의 3학년 3개 반을 편의표집하고 사전 학업성취도평가를 실시한 후 one-way ANOVA를 통해 평균점수가 동질한 두 반을 선정하였다. 선정된 2개 반을 각각 실험집단과 비교집단의 2개 그룹으로 나누고 학습장애, 전출입 등 연구에 참여하기 어려운 학생들은 제외한 후 남은 45명의 학생들을 대상으로 연구를 진행하였다. 그 중 실험집단은 24명(남 13명, 여 11명)이며 비교집단은 21명(남 10명, 여 11명)이다. 실험집단의 지도교사는 교직경력 10년의 여교사이며, 비교집단의 지도교사는 교직경력 12년의 남교사로서 비슷한 교직경력을 지니고 있다.

2. Test Tool and Analysis Frame

1) Test of Multiplicative Thinking

곱셈적 사고 수준 검사지는 Jang & Park (2006)과 Kim & Pang (2013)의 연구에서 사용한 곱셈적 사고 수준 검사지를 변형하여 제작하였으며 그 유형과 특징은 <Table 2>와 같다. 제작한 검사지는 예비 검사를 통해 문항 수와 내용을 수정·보완하였다. 검사지의 구체적인 내용은[Appendix 1]에 제시하였다.

<Table 2> Composition of multiplicative thinking level test sheet

Types of questions	Knowing multiple concepts	Knowing relationship between part and whole
Number of questions	3	2
Test items	Identifying the multiple relationship between subjects	Recognizing the relationship between the whole (box) and part (cookies) in a complex way
Question content	Problem of finding the total quantity using multiplication by looking at a group of given objects	Problem of inferring the number of parts and totals in accordance with the conditions given in the problem using a group

2) Achievement Test of Division and Reliability

나눗셈 학업 성취도 검사지는 나눗셈 단위 학습 전 · 후에 학생들의 나눗셈에 대한 이해 정도와 연산 능력을 비교 · 분석하기 위해 제작하였다. 평가 문항은 초등학교 3학년 1학기, 2학기 수학 지도서와 교과서를 바탕으로 교육과정에 제시된 내용의 하위 요소를 분석하여 개발하였으며 수학교육 전문가 3인에 의해 타당도를 검증받았다. 제작한 검사지의 Cronbach's alpha는 .815로서 높은 신뢰도를 나타냈다.

3) Framework of Multiplicative Thinking

곱셈적 사고 수준 검사지를 해결하는 과정에서 드러난 학생들의 사고 수준을 구분하기 위한 분석틀은 Jang & Park (2006)과 Kim & Pang (2013)의 분석틀과 예비 검사 결과를 종합하여 <Table 3>과 같이 제작하였다.

<Table 3> Analysis frame of multiplicative thinking level test sheet

Thinking level	Knowing multiple concepts	Knowing relationship between part and whole
Qualitative thinking I	Addition or multiplication fails to solve the problem	Can't solve problems by grasping part-total and using addition or multiplication
Additive thinking II	Solve all problems with addition	Part-to-whole thinking is incomplete and all problems are expressed by addition
Transitional thinking	IIIA Solve using multiplication and addition without understanding the relationship	Confusing the number of cookies (jelly) and the number of boxes. Solve problems by mixing multiplication and addition.
	IIIB Correctly grasped the relationship, but did not use multiplication equations or did not get the correct answer.	Confusing the number of cookies (jelly) and the number of boxes. Expressing and solving problem situations using multiplication.
	Complete multiplicative thinking IV	Part-to-whole thinking is complete, and problem situations are expressed using multiplication and solved by multiplication.

3. Procedure

본 연구는 이질통제집단 전 · 후 검사 설계(Non-equivalent control group pre · post-test design)를 적용하였으며, 구체적인 설계 모형은 <Table 4>와 같다.

<Table 4> Design model of research

Group	Pre-experiment	Experimental treatment	Post-experiment
Experimental group	O1, O2	X1	O3, O4
Comparison group	O1, O2	X2	O3, O4

O1: Pre-division achievement test
 O2: Pre-multiplicative thinking level test
 O3: Post-division achievement test
 O4: Post-multiplicative thinking level test
 X1: Division learning with non-proportional model and proportional model
 X2: Division learning applying proportional model

사전 검사는 곱셈적 사고 수준 검사지와 나눗셈 학업성취도 검사지를 이용하여 실시하였으며, 이 후 3주간 총 8차시에 걸쳐 나눗셈 수업을 진행하였다. 수업의 내용과 순서는 2015 개정 교육과정 3학년 2학기 수학 교과서의 ‘나눗셈’ 단원과 동일하였다. 비교집단은 현행 교과서에 제시된 수 모형과 수학 교과서 그리고 수학 익힘책을 활용하여 수업을 진행하였다. 이에 반해, 실험집단은 수업 주제와 순서는 같으나 수 모형과 동전 모형을 함께 활용하였다. 학생들은 8차시의 수업동안 각 모델의 실물모형을 직접 조작하면서 나눗셈을 학습하였으며, 비비레 모델 활용을 돕는 활동지를 제작하여 수업에 투입하였다. 비비레 모델 활동지의 구체적인 내용은 [Appendix 2]에 제시하였다.

두 반의 나눗셈 학습이 모두 끝난 후 사후 검사를 실시하고 곱셈적 사고 수준과 나눗셈 학업 성취도의 변화를 분석하였다. 학생들의 곱셈적 사고 수준을 확인하기 위해 곱셈적 사고 분석틀을 기반으로 문제 해결 과정을 초등 수학교육 박사과정 1인, 석사과정 2인이 독립적으로 분석하였으며, 일치되지 않는 부분은 개별 인터뷰를 통해 곱셈적 사고 수준을 합의하였다. 또한 비레 모델과 비비레 모델을 활용하는 나눗셈 문제를 추가로 제시하여 학생들이 두 모델을 활용하는 전략의 차이를 분석하였다. 이후 나눗셈 학업성취도 변화가 통계적으로 유의미한 차이가 있는지 판별하기 위해 나눗셈 학업성취도 검사 결과의 평균 점수 차를 SPSS 25.0을 이용하여 t검정을 실시하였다.

IV. Results

1. The Level of Multiplicative Thinking

곱셈적 사고 수준 분석틀을 바탕으로 사전·사후 곱셈적 사고 검사 결과에 대해 ‘배’ 개념과 ‘부분-전체’ 관계로 기준을 나누어 곱셈적 사고 수준을 구분하였다.

‘배 개념 알기’ 문제는 총 3문제로 한 묶음의 색종이가 주어졌을 때 전체 양을 구하는 문제와 한 상자에 담긴 쿠키의 개수가 주어졌을 때 전체 양을 구하는 문장제로 구성하였다. ‘배 개념 알기’에 관한 수준별 예시는 <Table 5>와 같다.

‘부분-전체 알기’ 문제는 총 2문제로 전체 상자의 수와 추가된 날개의 쿠키를 제시하여 전체 상자와 쿠키의 개수를 구하는 문제, 날개의 초콜릿을 제시하고 이를 다시 묶는 문항으로 구성하였다. <Table 6>은 문제들의 해결 과정에서 드러난 학생들의 곱셈적 사고 수준별 특징을 나타낸 것이다.

<Table 5> Examples of multiplicative thinking level in knowing multiple concepts

Level of multiplicative thinking	Problem solving process
I	Failure to solve the problem or solving the problem in a way that is not related to the content of the problem.
II	Solve the problem by adding the number of objects (confetti, jelly) per bundle presented in the problem by using a bundle (or box). 2. 다음 문제들을 읽고 문제를 해결하세요. ** 1상자에는 젤리가 6개씩 들어있습니다. 1) 백린이가 아빠에게 젤리 8상자를 만들었을 때 백린이가 만든 젤리는 모두 몇 개 있을까요?

The condition given to the problem is expressed as an expression or figure, and the problem is solved by mixing addition and multiplication.

III A

색종이가 모두 몇 장인지 구하는 식 또는 방법을 쓰고 답을 구하세요.

방법: $10 \times d = 90$

답: 40

2. 다음 문제들을 읽고 문제를 해결하세요.
 ** 1상자에는 별리가 6개씩 들어있습니다.

1) 별지이가 이복에게 캘리 8장자를 받았을 때 별지이가 받은 캘리는 모두 몇 개 있을까요?

종이: 1 1/2 7/8 6 1/2 6 7/8 H₂ O₂ 6 1/2 6 7/8 6 1/2 6 7/8
6 1/2 6 7/8
망: 4 8 7 4

Recognized the relationship between colored paper and bundles, jelly and the box, but could not use it to establish an appropriate multiplication equation and could not find an answer.

III B

2) 알파가 루키 3쌍자를 천수 물러 순전습니다. 엄마가 순전 루키는 모두 몇 개일까요?

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ + 28 \\ \hline 40 \end{array}$$

얼마개 송근 쿼키는 3쌍자이고
 4×3 를 라면 12개 얼마개 쿼
 쿼키는 12개이다. $12 + 28 = 40$
 모든 쿼개의 수는 40개이다.

Recognizes the relationship between colored paper and bundles, jelly and the ship correctly, and expresses the problem situation in a multiplication formula to obtain the correct answer.

IV

※ 쿠키 1상자에는 쿠키가 (4개씩) 들어있다.

1) 철수가 아빠에게 쿠키 2장을 받았을 때 철수가 받은 쿠키는 모두 몇 개 있을까요?

철수가 아빠에게 7장작을 받았고 쿠키 상자에는 쿠키가 4개씩 들어있으니까 4곱하기 7을 하면 정답은 28이니까 정답은 28입니다.

<Table 6> Examples of multiplicative thinking level in knowing relationship between part and whole

Level of
multiplicative
thinking

Problem solving process

Failure to solve the problem or solving the problem in a way that is not related to the content of the problem.

3) 엄마가 숨기고 남은 젤리는 모두 몇 상자인가요? 또 남은 젤리는 모두 몇 개일까요?

3상자 2개 정리

II

If the partial-total thinking is incomplete and all problems are solved by expressing it by addition, it is judged as level II remaining in additive thinking, but there were no students of level II.

The number of boxes and cookies (or jelly, chocolate) given in the problem is expressed as an expression or picture, and the problem is solved by mixing addition and multiplication.

III A

2) 임미가 정리 3상자를 폐지가 위해 순직했습니다. 임미가 순직 전까지는 모두 몇 개일까요?

물리: 

답:  187H

He tries to solve the problem by constructing a multiplication equation for solving the problem, but confuses the number of boxes with cookies (or jelly, chocolate), and adds or multiplies the number of pieces and boxes to get the wrong answer.

III B

3. 엄마가 철수에게 술잔 쿠키를 다시 주어서 처음의 쿠키 7상자가 되었습니다. 이때가 엄마 몰래 철수에게 쿠키 8개를 더 주었습니다. 이 때 철수가 가지고 있는 쿠키는 모두 몇 상자일까요?

문제 처음 쿠키는 28개이고 쿠키 상자에는 사제식 둘 있었고, 이사가
엄마 몰래 준 상자는 8개 이니까 4쿠키씩 50해서 나온답 32
몰 문제 있던 쿠키의 수 28과 더하면 60 이니까 답은 60 이
니다

IV

The process of obtaining the whole part from the whole and the remaining part, the whole process of obtaining the whole from the part, understands the problem situation correctly, and uses the conditions given to the problem (number of boxes, number of cookies, jelly, chocolate) to find the answer by formulating the correct formula.

3. 영미가 꿀수에게 숨긴 쿠키를 다시 주어서 처음의 쿠키 7상자가 되었습니다. 이때 꿀수에게 쿠키 8개를 더 주었습니다. 이 때 점수가 가지고 있는 쿠키는 모두 몇 상자일까요?

$$\begin{array}{r} 8-4=2-4\frac{2}{8} \\ \frac{8}{8} \\ 12+1=9\text{상자} \end{array}$$

2. Analysis of Changes in the Level of Multiplicative Thinking

실험집단과 비교집단의 실험 처치 후 곱셈적 사고 수준의 변화를 살펴보기 위해 사고 수준 단계의 상승 또는 하락에 따라 점수를 -3점부터 +3점까지 부여하여 분석하였다. 사전 검사에 비해 변화가 없는 경우 0점, 한 단계 상승한 경우 +1, 두 단계 상승한 경우 +2, 세 단계 상승했을 때 +3점을 주었고, 이와 반대로 감소한 경우엔 단계에 따라 -1, -2, -3점으로 점수를 부여하였다.

두 집단의 곱셈적 사고 수준의 변화 결과는 [Table 7]과 같으며, 그에 따른 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 3학년 학생들 중 과반수가 과도기적 곱셈적 사고 수준에 머물러 있었다. ‘배 개념 알기’에서 곱셈적 사고 수준에 대한 사전 검사 결과, I 수준부터 III수준의 학생들은 28명(62.22%)으로 나타났으며 IV 수준 학생들은 17명(37.78%)으로 나타났다. 또한 ‘부분-전체 알기’의 사전 검사에서도 I 수준부터 III수준의 학생들은 25명(55.56%)으로 나타났으며, IV수준 학생들은 20명(44.44%)으로 나타났다. 다시 말해, 3학년 학생들 중 완전한 곱셈적 사고 수준에 도달한 학생은 약 40% 정도이며 나머지 학생들은 여전히 불완전한 곱셈적 사고 수준에 머물러 있다고 볼 수 있다.

둘째, 비례 모델과 비비례 모델을 함께 적용한 나눗셈 수업은 질적 사고 수준의 곱셈적 사고를 하는 학생들에게 효과적이다. <Table 7>에서 볼 수 있듯이 실험집단과 비교집단의 ‘배 개념’과 관련된 곱셈적 사고 수준의 변화는 각각 +3점, +1점이었으며, ‘부분-전체’ 알기에서는 각각 +5점, -2점의 변화를 보였다. 변화 정도가 크지 않은 것으로 보아 전체적인 곱셈적 사고 수준의 변화는 매우 미미했으나, 사전 검사에서 I 수준에 머물렀던 실험집단 학생들이 사후에는 모두 II, III수준으로 향상되었음을 볼 수 있었다. 반면, 사전 검사에서 III, IV수준이었던 학생들은 사후에도 여전히 그 수준에 머물러 있었다. 이는 비례 모델과 비비례 모델을 함께 적용한 나눗셈 학습이 과도기적 사고 수준과 완전한 곱셈적 사고 수준의 학생들에게는 유의미한 효과를 보이지 못했지만, 질적 사고 수준 학생들의 곱셈적 사고 수준을 향상시키는데 효과적임을 의미한다.

<Table 7> Results of multiplicative thinking level test

Character			I	II	IIIA	IIIB	IV	Total	Degree of improvement
knowing multiplication concepts	Experimental group	pre	2	0	9	3	10	24	+3
		post	0	1	10	3	10	24	
	Comparison group	pre	5	1	5	3	7	21	+1
		post	5	1	4	3	8	21	
knowing relationship between part and whole	Experimental group	pre	3	0	5	5	11	24	+5
		post	0	0	5	9	10	24	
	Comparison group	pre	5	0	4	3	9	21	-2
		post	6	0	1	5	9	21	

이 비례 모델보다 더 편리하다는 의견을 피력하였다. 비비례 모델이 비례 모델에 비해 그림으로 표현하기 간편하고 몫의 크기가 한눈에 들어오므로 편리성이 우수하다는 것이다. 이는 학생들은 두 모델을 함께 활용하는 나눗셈 학습 과정 동안 모델 간 비교를 통해 편리성을 스스로 인지하였으며, 이를 통해 문제 해결 시 선호에 따라 모델의 자율적 선택이 이루어졌음을 시사한다.

4. Achievement Test Results

실험집단과 비교집단의 사후 검사를 실시한 결과를 분석하기 위해 사전·사후 나눗셈 학업 성취도 검사 결과에 대해 대응표본 t검정과 독립표본 t검정을 실시하였다. t검정에 대한 구체적인 결과는 <Table 8>과 <Table 9>과 같다.

대응표본 t검정을 실시한 결과, 실험집단이 나눗셈 학업성취도에서 유의미한 차이를 보인 것에 반해($t=-2.665$, $p=.014$), 비교집단은 유의미한 차이를 보이지 않았다($t=.259$, $p=.798$). 또한 독립표본 t검정 결과, 실험집단과 비교집단은 나눗셈 학업성취도에서 유의미한 차이를 보였다($t=2.222$, $p=.031$). 이는 비례 모델과 비비례 모델을 함께 적용한 나눗셈 학습이 나눗셈 학업성취도 향상에 유의미한 효과를 있음을 의미하며, 비례 모델만을 적용한 나눗셈 학습은 유의미한 효과가 없음을 의미한다.

<Table 8> Corresponding sample t-test result for changing of achievement test

	Mean	N	SD	t	df	p
Experimental group	pre 88.67 post 92.31	24	6.7025	-2.665	23	.014*
Comparison group	pre 83.57 post 82.76	21	14.3174	.259	20	.798

* $p<0.05$

<Table 9> Independent sample t-test results for the average change in the post-test

	Mean	N	SD	t	df	p
Experimental group	92.31	24	9.0875	2.227	43	.031*
Comparison group	82.76	21	18.6491			

* $p<0.05$

IV. Discussion

본 연구는 3학년 2학기 나눗셈 수업에서 비비례 모델의 적용 여부에 따른 학생들의 곱셈적 사고 수준과 나눗셈 학업 성취도 변화를 분석하였다. 이를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 나눗셈을 학습할 때 비례 모델과 비비례 모델 제시 방안에 대한 심도있는 논의가 필요하다. 나눗셈 학업성취도 변화에 대한 t검정 결과, 비례 모델과 비비례 모델을 함께 적용한 실험집단은 비교집단과는 달리 학업 성취도가 유의미하게 향상되었다. 이러한 결과는 비례 모델과 비비례 모델을 함께 적용한 나눗셈 수업이 더 효과적임을 의미한다. 다만, 참여자의 수를 고려할 때 이러한 결과를 일반화하기는 어려우며, 학생의 모델 활용 수준과 발달 정도를 고려하여 구체적인 모델 적용 방법을 결정해야 할 것이다. 또한 비록 수 모형이 초기 위치 기수법 개념을 학습하기에 효과적인 모델이지만, 표준 알고리즘을 도입한 후에는 의미에 기초한 연산을 학습하기에 적절하지 않으므로(Chong, 2003; Thompson, 1999), 기초적인 자릿값 개념이 자리 잡은 후에는 여러 모델을 동시에 적용하는 방안에 대하여 고려해 볼 필요가 있다.

둘째, 비비례 모델의 적용 시기는 3학년 이후가 적합할 것이라고 사료된다. 곱셈적 사고과정 분석 결과에 따르면, 학생들이 비례 모델과 비비례 모델의 교환 관계를 자유롭게 활용하는 모습을 보였다. 이는 3학년 학생들이 비비례 모델을 통해 수식을 정확히 표현할 수 있을 뿐만 아니라 그 표현이 자릿값 이해를 넘어 모델 간 공통적인 추상성을 이해하였음을 반증하는 증거이다. 특히 2학년 학생들이 비비례 모델에서 모델 간 관계를 이해하지 못하므로 2학년의 비비례 모델 적용이 적합하지 않다고 주장한 Kang et al. (2015)의 연구 결과를 고려할 때, 3학년부터 비비례 모델의 적용이 적합하다고 볼 수 있다. 다만 비비례 모델의 적용은 학생들의 양적 사고를 기반으로 하므로 사용 방법에 대한 신중한 검토를 필요로 한다. 따라서 비비례 모델을 도입하기 전에 학생들의 자릿값 개념과 비례 모델의 이해 정도를 진단하여 그에 맞는 비비례 모델의 종류와

적용 단원을 계획하는 것이 적절한 접근 태도라 볼 수 있겠다.

셋째, 곱셈적 사고 수준이 초기 단계인 학생들은 여러 모델을 함께 적용한 수업이 효과적이다. 곱셈적 사고 수준의 변화 결과에 따르면, 덧셈과 곱셈으로 문제를 해결하지 못하던 질적 사고 수준 학생들이 실험 후 모두 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 활용하는 수준으로 향상되었다. 그러나 과도기적 곱셈적 사고 수준과 완전한 곱셈적 사고 수준에 이른 학생들은 수준의 변화를 보이지 않았다. 이러한 결과는 두 가지로 해석이 가능하다. 먼저 비례 모델과 비비례 모델을 함께 활용한 나눗셈 수업이 곱셈적 사고 수준이 초기 단계인 학생들에게 더 효과적이라고 볼 수 있다. 두 번째로, 학생들이 수 모형을 연산과 연계된 의미 객체로 인식하는 것이 아니라 형식적인 구체물로 인식했다고 볼 수 있다. 즉, 3학년 학생들은 수 모형을 이용한 기초연산 학습 과정을 2년 동안 거쳐 왔으므로, 수 모형이 개념을 자극하는 매개체로서의 유효성을 상실했다는 것이다. 따라서 새로운 모델의 도입은 학생들의 곱셈적 사고 과정 향상의 촉매로 작용했을 수 있다. 어떤 가능성을 채택하더라도 여러 모델을 활용한 수업은 기초 수준의 학생들에게는 효과적일 수 있다.

넷째, 새로운 개념을 학습할 때 학생들에게 다양한 종류의 모델을 제시하여 개념과의 의미 연결을 꾀할 필요가 있다. 곱셈적 사고 과정에 대한 인터뷰 결과, 학생들은 새로운 모델을 접하게 되면 기존 모델과의 내면적 비교 과정을 통해 편리성이 뛰어난 모델을 선정하고 문제 해결에 적용하는 모습을 보였다. 즉, 학생들은 여러 모델들의 비교를 통해 시각적으로 표현이 더 쉽고 효율적인 모델을 추구하는 경향이 있다. 시각적 표현은 ‘학생 스스로 문제 상황을’ 탐색하는 것이 가능하도록 하며, 문제 해결의 ‘결과뿐만 아니라 과정을 중시’하도록 하는 방법이 될 수 있다(Kim, Lee & Ku, 2013). 따라서 본 연구에서 제시한 수 모형과 동전 모형 외에도 여러 모델을 소개하여 학생들이 모델 간 비교를 통해 효과적인 모델을 찾아가는 경험을 제공할 필요가 있다. 이를 통해 학생들은 구체물을 관찰하고 수학적으로 분석할 수 있으며(Park et al., 2017), 모델 간 공통적인 추상성을 인식하여 상황에 따라 적합한

모델 활용 방법을 습득할 수 있다.

마지막으로 학생들의 곱셈적 사고 수준을 향상시켜줄 방안을 모색해야 한다. 곱셈적 사고 수준의 변화 결과에 따르면, 참여자들은 덧셈적 사고와 곱셈적 사고가 혼재된 곱셈적 사고 수준을 보였다. 이러한 결과는 초등학교 3학년의 대다수가 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 함께하는 불완전한 곱셈적 사고를 하고 있다는 Kim & Pang (2013)의 연구 결과와도 일치한다. 수학의 학습과정은 개념 간의 연속성과 계열성을 바탕으로 이루어지므로 새로운 개념의 학습은 선행 개념의 이해를 근간으로 이루어진다. 따라서 곱셈적 사고의 불완전한 이해는 나눗셈 학습의 어려움을 초래하므로 학생들의 미성숙한 곱셈적 사고 수준을 향상시키기 위한 방안을 강구하고 이를 지지할 수 있는 교사의 전문성을 길러줄 필요가 있다(Cha, Son & Lee, 2020).

본 연구는 나눗셈 학습에서 비례 모델만을 사용하는 기존 방법에서 벗어나 비비례 모델을 함께 적용해보고 그 효과를 살펴보았다. 향후 후속 연구에서는 비비례 모델 적용에 적합한 수학과 영역과 단원을 밝히고 비비례 모델의 구체적인 활용 방법을 포함한다면 더욱 유의미한 연구가 될 것이라고 기대한다.

References

- Cha, J. H., Son, T. K., & Lee, K. H. (2020). Analysis of the effects of changing novice teacher's gaze through gaze image self-reflection in elementary mathematics class. *Brain, Digital & Learning*, 10(1), 107-121.
- Chong, Y. O. (2003). On the teaching of mental arithmetic in primary school mathematics. *School Mathematics*, 5(2), 167-189.
- Clark, F., & Kammi, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal of Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51.
- Han, E. H., & Ryu, H. S. (2008). Multiplicative thinking in elementary mathematics education -

- focusing on the development of teaching-learning materials for 5th graders. *School Mathematics*, 10(2), 155-179.
- Jang, M. R., & Park, M. G (2006). A study on the multiplicative thinking of 2nd grade elementary students. *Communications of Mathematical Education*, 20(3), 443-467.
- Jordan, W. J. (2010). Defining equity: Multiple perspectives to analyzing the performance of diverse learners. *Review of Research in Education*, 34(1), 142-178.
- Kang, T. S., Lim, M. I., & Chang, H. W.(2015). Study on applicability of nonproportional model for teaching second graders the number concept. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 19(3), 305-321.
- Kim, J. C. (2018). A study on the neuroscience and operation in mathematics education. *Brain, Digital & Learning*, 8(1), 43-50.
- Kim, J. W., & Pang, J. S. (2013). An analysis on third graders' multiplicative thinking and proportional reasoning ability. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 23(1), 1-16.
- Kim, S. H., Lee, K. H., & Ku, M. Y. (2013). The fourth graders' visual representation in mathematics problem solving process. *Education of Primary School Mathematics*, 16(3), 285-301.
- Kim, S. J., Kim, S. H., Sin, J. S., Lee, D. H., Lee, J. Y., Lim, M. G., Jung, E. S., & Choi, C. W. (2013). *Elementary school mathematics and textbook research and guidance methods*. Seoul, Korea: Dongmyungsa
- Lee, J. J. (2001). *Identification of multiplicative thinking in elementary schoolers*. Unpublished master's thesis, Korea National University of Education, Cheongju, Republic of Korea.
- Ministry of Education (2018). *Mathematics teacher's manual 3-2*. Seoul, Korea: Chunjae Education Inc.
- Park, H. M., & K. W. (2006). Students informal knowledge of division in elementary school mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 10(2), 221-242.
- Park, H. N., Han, J. E., Yoon, H. R., Jeong, S. Y., Kim, D. R., & Lee, K. H. (2017). an analysis of cognitive demands of mathematical tasks in korea and japan elementary school textbooks in proportional reasoning. *Brain, Digital & Learning*, 7(1), 49-66.
- Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. London: Lowe and Brydone Limited.
- Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity*. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.
- Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics* (9th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-39). Albany, NY: SUNY Press.
- Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In I. Thompson (ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-184). Buckingham UK: University Press.

[저자의 소속과 직위]

좌승협 : 제주 백록초등학교, 교사, 제1저자

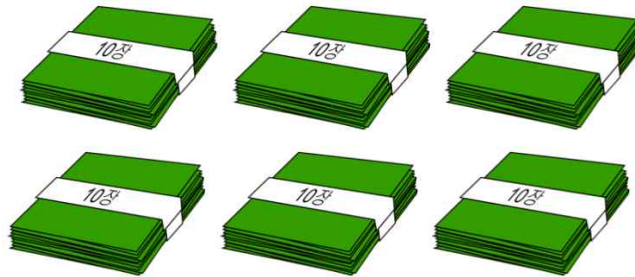
손태권 : 한국교원대학교, 대학원생, 공동저자

송다솜 : 한국교원대학교, 대학원생, 공동저자

이광호 : 한국교원대학교, 교수, 교신저자

[Appendix 1] Test of Multiplicative Thinking

1. 그림을 보고 물음에 답하여 봅시다.



색종이가 모두 몇 장인지 어떻게 구하면 좋을까요?

2. 다음 문제들을 읽고 문제를 해결하세요.

** 쿠키 1상자에는 쿠키가 4개씩 들어있다.

1) 철수가 아빠에게 쿠키 7상자를 받았을 때 철수가 받은 쿠키는 모두 몇 개 있을까요?

2) 엄마가 쿠키 3상자를 철수 몰래 숨겼습니다. 엄마가 숨긴 쿠키는 모두 몇 개일까요?

3) 엄마가 숨기고 남은 쿠키는 모두 몇 상자인가요? 또 남은 쿠키는 모두 몇 개일까요?

3. 엄마가 철수에게 숨긴 쿠키를 다시 주어서 처음의 쿠키 7상자가 되었습니다. 아빠가 엄마 몰래 철수에게 쿠키 8개를 더 주었습니다. 이 때 철수가 가지고 있는 쿠키는 모두 몇 상자일까요?

[Appendix 2] Activities papers of division lesson using non-proportional models

수학	2. 나눗셈	03 (두 자리 수) ÷ (한 자리 수) (3) 3학년 반 번 이름:
----	--------	---

1. 아래의 그림은 동전모형으로 $52 \div 4$ 을 계산하는 과정을 나타낸 것입니다. 빈칸을 채워 그림에 알맞은 세로셈을 완성해 보세요.

	$4 \overline{) 52}$
	$\begin{array}{r} \square \\ 4 \overline{) 52} \\ \underline{\square} \quad \leftarrow 4 \times \square \\ 12 \end{array}$
	$\begin{array}{r} \square > \square \\ \square \\ 4 \overline{) 52} \\ \underline{\square} \\ 12 \\ \underline{\square} \quad \leftarrow 4 \times \square \end{array}$ $\begin{array}{r} \square \\ 4 \overline{) 52} \\ \underline{\square} \\ 12 \\ \underline{\square} \\ \square \end{array}$

2. 빈 칸에 동전모형을 알맞게 채워서 $81 \div 3$ 를 계산해 보세요.

➡

$81 \div 3 = \square$

3. 다음을 계산하세요.

$(1) 78 \div 6 = \square$

$(2) \begin{array}{r} \square \\ 5 \overline{) 70} \end{array}$