

A Study on 5th Graders' Understandings of the Meaning of Symmetric Figure for a Point Using the 'Bilateral Symmetric Ruler'

Sun-Young Kim¹⁾, Kwang-Ho Lee^{*2)}

¹⁾Daegu Daesil Elementary School · ²⁾Korean National University of Education

‘좌우대칭 자’를 활용한 5학년 학생들의 점대칭도형의 의미 이해

김순영¹⁾ · 이광호²⁾

¹⁾대구대실초등학교 · ²⁾한국교원대학교

<ABSTRACT>

The purpose of this study is to analyze 5th graders' Understandings of the meaning of Symmetric Figure for a Point and the types of problems or errors while constructing and to develop student's Understandings using the New Educational Method. By the literature I arranged the complex meaning of 'Symmetry' in the sight of transformation, analyzed curriculums of Korea and other countries about 'Point Symmetry', and found out the cause of students' difficulties while constructing the Symmetric Figure for a Point. For solving this problem I made the 'Bilateral Symmetric Ruler' and 'Problems without the grid'. And students had the lessons of construction of Symmetric Figure for a Point using them. After the lesson, I analyzed the effectiveness of the new educational method using the questionnaire and the interview.

Keywords : Symmetry, point symmetry, symmetric figure for a point, rotation, reflection, point reflection, construction, bilateral symmetric ruler

I. Introduction

도형(기하)은 고대 이집트 수학에서 토지 측량의 필요에 의해 발생하게 된 것으로 인간이 직관적으로 느낄 수 있으며 오래 전부터 관심을 가졌던 수

학의 한 영역이다. 특히 기하학을 바탕으로 한 <Euclid 원론>은 수학을 탄생시킨 모태로서 현 초·중등 교육과정에서 도형 영역의 중요성을 부인할 수 없다(Woo, 1998).

이러한 도형 영역의 중요성과 함께 수학의 영역 별로 학생들의 흥미도를 분석한 연구에 따르면 초

* Corresponding author : Kwang-Ho Lee, paransol@knue.ac.kr

Received September 4, 2019; Reviewed Septembert 17, 2019 Corrected September 20, 2019; Accepted September 22, 2019

© 2019. Institute of Brain based Education, Korean National University of Education

등학교 학생들이 타 영역에 비해 도형영역을 가장 좋아함을 알 수 있었다. 그 중에서도 ‘합동과 대칭’ 단원을 가장 선호하였는데 그 원인은 내용이 쉽고 재미있기 때문이라고 응답하였다(Park, 2017). 그럼에도 불구하고 선대칭도형과 달리 점대칭도형을 이해하는데에는 큰 어려움을 느꼈다(Han & Shin, 2007). 그 원인을 현재 교과서에 제시된 점대칭도형의 정의와 작도 방법에서 찾을 수 있는데 초등학교 수학교과서 5-2(MoE, 2015a)에 의하면 선대칭도형의 정의는 ‘한 직선을 따라 접어서 완전히 겹쳐지는 도형’으로 대칭 중의 ‘반사’에 대한 정의를 하였고, 점대칭도형의 정의는 ‘한 도형을 어떤 점을 중심으로 180° 회전시켜서 처음 도형과 완전히 겹쳐지는 도형’으로 대칭 중의 ‘회전’에 대한 정의를 하였다. 그러나 도형의 이름은 모두 ‘대칭’이다. ‘대칭’의 포괄적인 의미에 대한 언급 없이 두 가지 다른 유형의 ‘대칭’의 의미를 학생들이 직관적으로 이해하도록 제시되어 있다. 게다가 점대칭도형의 정의는 ‘회전’의 의미였으나 작도 방법은 ‘점 반사’의 의미로 제시하여 두 가지 의미를 분절적으로 학습하는 혼란이 나타나고 있다.

이렇게 ‘합동과 대칭’의 학습 과정을 거치고 상급학년이 된 학생들은 점대칭도형의 이해에 많은 어려움을 보인다. 일상생활에서 사용하는 ‘대칭’의 의미인 ‘반사’의 의미만으로 생각함으로써 ‘회전’, ‘반사’, ‘평행이동’의 의미가 포함된 대칭의 포괄적인 개념을 이해하지 못하고(Kwon, 2018), 선대칭도형과 서로 혼동하여 작도하는 어려움을 보이고 있다(Kim, 2009).

이를 해결하기 위해 초등학교에서 점대칭도형을 작도하는 지도 방안에 대한 연구는 손으로 작도하는 것보다 주로 컴퓨터를 활용한 지도방안 연구(Kang & Ko, 2001; Ryu, 2001; Choi & Park, 2014)에 치우쳐 있다. 그러나 Woo(1998)의 연구에 따르면 현 학교 수학에서 기하교육의 목표는 Freudenthal의 현실적 수학교육의 관점에서 구체물의 관찰과 조작을 통한 활동을 통해 여러 기하학적 변환에 대한 개념을 형성하는 것이라고 하였다. 또 “14세 이전까지 대칭, 평행이동, 변환의 합성 등과 같은 기본 개념을 강조하면서 평면기하를 ‘경험적인’ 방법으로 지도한다. 물리학 일부분으로서 기하를 지도하는 방식도 권고할 만하다.” 라고 하면서

과학적, 실측적인 부분을 강조하였다. Polya도 활동주의적 입장에서 Euclid 작도의 교육적 가치를 말하며 “자와 컴퍼스를 이용하여 도형을 그리거나 작도하는 것이 초보자에게 도형에 친근하게 하는데 가장 적합하다”고 하였다. 초등 수학교육에서 컴퓨터가 아닌 손으로 직접 작도하는 것의 중요성을 언급한 연구는 드물게 있었는데 Cho & Joung(2013)은 초등학생은 손의 발달을 피해야 하는 시기라고 하였고, Allen(2007, Choi & Joung, 2013 retrieved)은 컴퓨터를 사용하여 도형을 그리면 진정한 참여자가 아닌 관찰자가 된다고 하였다. 그러나 점대칭도형의 개념을 익힐 때 손으로 쉽게 작도하는 방법에 대한 구체적인 연구는 부족하였다.

따라서 본 연구에서는 초등학교 5학년 학생들의 점대칭도형에 대한 개념 이해도를 파악하고 점대칭도형을 작도할 때 어떠한 어려움을 겪고 오류를 보이는지 관찰함으로써, 점대칭도형의 개념 이해도 및 작도의 편리성을 높일 수 있는 학습 교구와 지도 방안을 개발하여 효과를 검증해 보고자 한다.

II. Theoretical Background

1. The Importance of Transformation

대칭성은 우리 주변의 자연 환경 속에 존재하며 고대부터 오늘날에 이르기까지 미술, 과학 분야에서도 깊게 연구되는 분야이다. 그러나 대칭성에 주목하여 처음으로 ‘군(group)’이라는 용어를 사용한 사람은 갈루아이다. 그는 5차 방정식의 가해성을 검증하기 위해 대칭성에 주목하였다. 군(group)이 현대적 의미로 정의되는 것은 닫힘성, 결합법칙의 성립, 항등원과 역원의 존재성이다. 그러나 초기에는 닫힘성에만 집중하여 ‘치환군’이 곧 ‘대칭군’이었다. 즉 어떠한 변환들끼리의 합성을 하여도 원래 모습과 같은 치환군의 원소들 안에 속하게 된다는 ‘닫힘성’의 성질을 띤 대칭성이 있는 무늬나 자연현상을 보았을 때 우리는 아름다움을 느낀다. 이러한 대칭성을 기술할 수학적 언어가 ‘군’ 개념이다. 갈루아의 연구도 방정식의 근과 계수와의 관계에서 근들

의 ‘대칭성’을 이용하였고, ‘치환군’에 의해 n 차 방정식의 가해성을 판별하였다. 이후 ‘치환군’에 머무르던 군 개념이 Klein에 의해 ‘변환군’으로 확장되었다(Nam & Park, 2002; Jin, 2013; Shin, 2017).

기하학의 정의가 Euclid 기하의 정적인 도형에 대한 것에서 이동하는 도형이 갖는 불변성, 즉 변환군에서의 불변성에 대한 것이 되었다. 따라서 본 연구에서도 동적인 변환의 관점에서 직접 돌려보고 작도하는 활동을 통해 점대칭도형의 개념을 ‘회전이동변환’과 ‘대칭이동변환(점 반사)’의 포괄적인 의미로 익히고, 대칭성을 직관적으로 느끼며 작도할 수 있도록 하였다.

2. The meaning of ‘Symmetry’ & ‘Point symmetry’

1) The meaning of ‘Symmetry’ & Mathematic Categorical Location of ‘Point Symmetry’

여러 논문을 분석한 결과 다음의 <Table 1>과 같이 ‘대칭’의 의미를 ‘광의의 의미’와 ‘협의의 의미’에서 재정리하고 ‘점대칭도형’이 갖는 의미의 수학적 범주적 위치를 나타내어 보았다.

‘대칭’은 광의의 의미로 Euclid의 ‘합동변환(congruent transformation)’과 같은 의미이며 변환기하의 관점에서 Farmer의 ‘강체운동(rigid motion)’과 같은 넓은 의미의 용어이다. 이것은 평행이동, 회전, 반사, 미끄럼반사, 제자리를 포함한다(Han & Shin 2007; Jin, 2013). 그러나 협의의 의미로 ‘대칭’은 Euclid의 합동변환 중에 하나로 ‘대칭이동변환(뒤

집기)’, 즉 ‘반사(reflection)’의 의미만을 갖고 있다.

Park(2013)에 의하면 ‘대칭’을 영어로 한 symmetry의 어원은 ‘함께(together with)’라는 뜻의 그리스어 sun과 ‘측정하다(measure)’를 의미하는 그리스어 metron을 합한 단어로 symmetry는 ‘함께 측정한다’는 뜻이 있다고 하였다. 그래서 대칭점이나 대칭축에서 어떤 한 점까지의 거리를 측정하면 대칭의 위치에 있는 다른 점까지의 거리도 ‘함께 측정’하는 것이라고 하였다. 따라서 ‘좌우대칭 자’를 활용하여 양쪽의 대응점을 함께 측정하여 작도하는 것이 대칭의 어원에 맞게 의미를 이해할 수 있는 방법일 것이다.

2) From the Physical Point of View, the Term ‘Point Symmetry’ as ‘Point Reflection’

대부분 ‘점대칭도형’을 정의할 때 ‘대칭’의 광의의 의미에서 180° ‘회전’이동으로 설명하였다. 그럼에도 불구하고 ‘대칭’의 협의의 의미에서 ‘점 반사(대칭이동변환)’의 의미로서 중요성을 찾기 위해 물리학적, 자연 현상적 관점에서 살펴보았다.

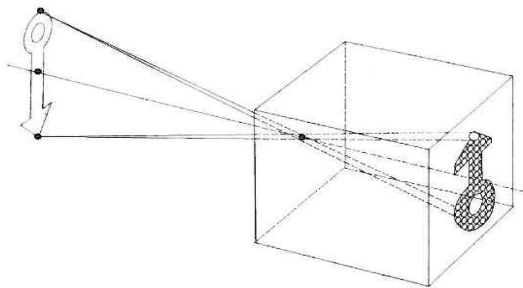
Shin(2017, p. 93, p. 99)은 자연 현상과 물리법칙 속에 내재된 대칭을 언급하며 물리학과 대칭의 밀접한 관계를 피력하였다. Woo(1998, p 196)는 기하지도에 있어서 과학적 접근이 필요하다고 하면서 “기하는 현실적인 공간을 수학화한 물리적인 이론이기도 하므로 그러한 면을 고려하지 않은 기하교육은 불완전하다”고 하였다. Klein(2004, Woo, 1998, p. 191 retrieved)은 “수학교육에서 수학이 고립적으로 지도되는 것은 바람직하지 않으며, 수학과 다른

<Table 1> Mathematics categorical location of ‘point symmetry’

Higher Level	Congruent Transformation	Symmetry	Rigid Motion
Lower Level	• translational Transformation	• translation	Moving without change in shape and size
	• rotational Transformation	• rotation	
	• symmetric Transformation(by Point, Line, Plane)	• reflection	
	• glide symmetric Transformation	• glide reflection	
		• isometry	
The meaning of			
‘Point Symmetry’ • rotational Transformation		• rotation	
in Elementary Mathematics • symmetric Transformation(by Point, Line, Plane)		• reflection	

과학 사이의 활발한 상호작용이 가능한 한 최대한 허용되어야 한다”고 하였다.

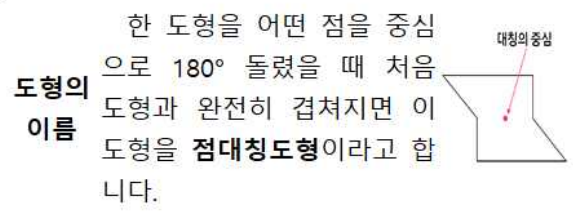
이러한 관점에서 물리학적으로 ‘점대칭’이 일어나는 자연 현상을 찾아보면 [Figure 1]과 같이 ‘바늘구멍 사진기’의 원리(Kim, Kim & Kim, 2006)로 일어나는 현상에서 유사성을 발견할 수 있다. 빛의 직진에 의해 바늘구멍 사진기에서 일어나는 상의 맺힘 현상은 180° ‘회전’의 형태보다는 한 점을 중심으로 ‘점 반사’의 변환 형태로 일어난다. 초등학교에서 ‘점대칭도형’을 작도할 때에도 180° ‘회전’의 방법으로 작도하기보다는 바늘구멍 사진기의 원리와 같이 ‘점 반사’의 방법으로 작도를 한다.



[Figure 1] The principle of ‘pinhole camera’ (Kim, Kim & Kim, 2006)

3) Definition of ‘Point Symmetry’ In Korean Textbook

우리나라 2009 개정 교육과정의 초등학교 수학과 과서 5-2(교육부, 2015a) 65쪽에는 ‘점대칭도형’의 용어를 [Figure 2]와 같이 수학적으로 ‘회전’의 의미로 정의하였다.



<Figure 2> Definition of ‘point symmetry’ in Korean mathematics textbook

반면 초등학교 수학지도서 5-2(MoE, 2015b)에 나타난 점대칭도형의 정의는 “두 점 A와 A’가 있을 때 선분 AA’의 중점을 O라 하면, 두 점 A와 A’는 점 O를 중심으로 하여 점대칭이라 하고, 점 O를 대칭의 중심이라고 한다. 한 도형 위의 각 점의 대칭인 점이 다시 그 도형 위에 있고 이들 대칭의 중심이 일치할 때 이 도형을 점대칭도형이라고 한다.”라고 ‘점 반사’의 의미로 설명하면서도 “합동변환의 측면에서는 선대칭은 대칭변환에 해당되지만 점대칭은 회전변환이다.”라고 하여 ‘점대칭’이라는 용어를 정의할 때 ‘대칭 이동변환(반사)’으로서의 의미는 적게 두고 있다.

4) The Term ‘Point Symmetry’ used In Korea and Other Countries.

아래 <Table 2>과 같이 6개국의 교육과정을 비교·분석한 결과(Australian Curriculum Assessment And Reporting Authority, 2011; California State Board of Education, 2006; Ministry of Education, Singapore, 2006a, 2006b; The Ministry of Education, Canada, 2005; Pang, & Kim, 2017; MoE, 2015c, 2018a) 영어권 국가에서는 일반적으로 점대칭이라는 용어 대신 ‘회전대칭(rotational symmetry)’을 사용하고 있으며, 점대칭(point symmetry)이라는 용어를 사용한 나라는 한국과 일본이었다. 따라서 ‘점대칭(point symmetry)’이라는 용어가 국제적으로 일관성 있게 정립되지 않은 수학 용어임을 알 수 있다. 현재 또 Wikipedia(2019)에 의하면 점대칭(point symmetry)은 ‘점 반사(point reflection)’라는 용어에 통합되어 검색되는 것으로 보아 점 반사의 의미가 강한 것임을 알 수 있다. 따라서 이로 인해 공식적인 수학 용어인 ‘대칭(symmetry)’의 광의의 의미와 협의의 의미에 대한 혼란은 한국의 학생들에게 자연스럽게 발생하게 된다.

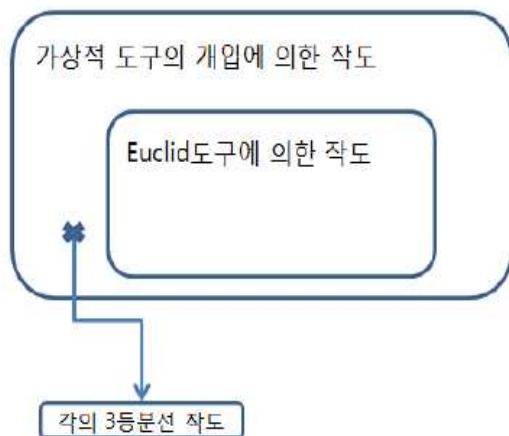
<Table 2> Comparison of 6 countries’ curriculum.

	USA	Australia	Singapore	Canada	Japan	Korea
Line Symmetry	bilateral symmetry	line symmetries				
Point Symmetry	rotational symmetries				point symmetry	

3. Construction

1) General Meaning of Construction & Educational Expanded Meaning of Construction

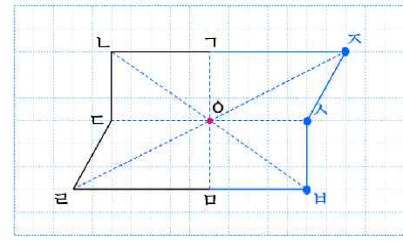
<Euclid 원론>의 작도는 ‘눈금 없는 자와 컴퍼스 만’으로 그리는 것이라고 암시하고 있다(Jang, 1997). 그러나 Kim & Kang(2017, p. 134)에 의하면 [Figure 3]와 같이 학교 교육에서 작도의 교육적 활용을 위해서는 작도가 수월해야 하고, 작도 가능범위를 확장하여 “가상적 도구가 개입되어 작도될 수 있는 것이라면 작도 가능”하다고 하였다. 가상적 도구로는 “각의 크기가 기록된 각도기나 길이를 잴 수 있는 자”와 같은 것을 지칭하였다. 따라서 본 연구에서는 작도의 확대된 의미에서 눈금이 있는 도구인 ‘좌우대칭 자’를 활용하여 점대칭도형을 그리는 것을 작도로 정의하였다.



[Figure 3] Expanding the meaning of construction by the intervention of virtual tools (Kim, C., Kang, J. 2017)

2) The Problem of the Construction of ‘Symmetric Figure for a Point’ in Textbook

2009 개정 교육과정의 수학교과서 5-2(MoE, 2015a)에는 [Figure 4]과 같이 보조선을 활용하여 ‘점 반사’의 원리로 대응점을 찾는 방법을 안내하였다.



[Figure 4] The way of construction of the figure for a point in mathematics textbook 5-2 p. 69

또 수학 5-2 교사용 지도서(MoE, 2015b, p. 177)에 의하면 “점대칭도형을 그릴 때에는 모눈종이에 점대칭도형을 제시하는 것이 좋다. 모눈종이에서는 점대칭도형의 대응점들이 대칭의 중심에서부터 같은 거리에 있다는 사실을 자를 사용하지 않고도 쉽게 확인할 수 있기 때문이다”라고 하며 자 없이 모눈의 칸만을 활용하여 대응점을 쉽게 찾을 수 있도록 하였다.

그러나 자 없이 모눈의 칸을 활용하는 것은 가로좌표와 세로좌표를 활용한 해석기하적 관점이다. Jin(2013, p. 137)에 의하면 “해석기하의 방법을 쓰지 않고도 직관적으로 합성변환을 다루는 수업을 디자인하고자 한다”라고 하여 초등 수학에서 모눈 활용의 불필요성을 피력하였다.

또 Han & Shin(2007, pp. 82-86)에 의하면 “우리나라는 모눈종이에 강제운동(rigid motion)을 먼저 활동시킨 후에 대칭을 지도하기 때문에 어려움이 발생한다.”, “점대칭의 지도도 선대칭의 지도에서와 같은 방법으로 이루어져야 한다.”라고 하였다. 즉 점 O를 대칭의 중심으로 대응점인 A'를 찾을 때 “선분 OA의 길이와 선분 OA'의 길이가 같아지는 점 A'를 찾도록”해야 한다고 하였다. 이를 위해서 학생들이 모눈의 칸을 세는 부담을 줄이고 ‘길이 측정’에만 집중할 수 있도록 ‘모눈 없는 문항’이 필요하다. 따라서 본 논문에서는 점대칭도형의 작도에서 ‘좌우대칭 자’를 활용하여 ‘점 반사’의 의미를 체험하도록 하며, 특히 처음 작도하는 기초 단계에서는 백지에 ‘모눈 없이 대칭의 중심으로부터 거리가 자연수인 문항’을 충분히 해결하도록 하였다.

III. Materials and Methods

1. Participants

본 연구 대상은 D광역시 A초등학교의 5학년 전체 학생들로서 생명윤리위원회(KNUE IRB)의 승인을 받아 참여 동의서를 제출한 학생을 대상으로 하였다. 이 학교는 학업성취도 수준이 상, 중, 하 고르게 분포된 군 단위 지역의 학교로 학생들의 학업 수준 차이가 크고, 3월 진단평가 수학 성적을 타학교와 비교했을 때 보통 수준이다. 이 진단평가 결과 학급별로 각각 1-2명의 부진아가 고르게 발견되었다. 5학년의 학급 수는 5개이고 학급당 인원수는 23-26명이다. 이전 학년 반 편성 규정에 의거하여 5개 반의 학생들의 지적, 신체적, 사회적 조건이 유사하도록 학기 초에 구성되었다. 학원을 통한 선행 학습을 한 학생의 비율은 학급별로 60-70% 이다. 그 중 1학기 학업성취도 평가 결과 학년 평균에 가장 가까운 1개 학급을 추출하여 실험군으로 하였고, 나머지 4개 반은 아무런 처치를 하지 않은 대조군으로 하였다.

2. Procedure

본 연구는 <Table 3>과 같이 대조군의 학생들(4학급)은 5학년 2학기 2. 합동과 대칭 단원의 점대칭도형의 1-2/2차시를 ‘일반 자’와 ‘모눈 있는 문항’(교과서 문항)을 활용하여 안내된 작도 절차대로 학습하였고 자유탐구단계에서 ‘모눈’ 위에서 다양한 점대칭도형 작도를 하였다. 이때 해당 담임교사에게는 본 연구의 어떠한 방향성도 언급하지 않고 통제하지 않았다. 반면 실험군(1학급)의 학생들은 점대칭도형의 정의를 익히는 1/2차시까지는 교과서 절차대로 학습하였고, 작도를 하는 2/2차시에서는 교과서를 보지 않고 개발된 ‘좌우대칭 자’와 ‘백지’ 및 ‘모눈 없는 문항’으로 학습하였다. 자유탐구단계에서는 ‘백지’에서 자유롭게 다양한 모양의 점대칭도형 작도를 하였다.

실험군에게 개발된 교구를 활용하여 실시한 점대칭도형 2/2차시의 교수·학습 지도안의 수업 절차는 <부록 1>과 같이 Han(1999, Park & Shin, 2006 retrieved)가 작도문제의 특성에 맞추어 수정한 Polya의 문제해결 4단계(분석-작도-증명-탐구)에 따른다.

두 집단의 1-2차시 수업이 모두 종료되면, 동시에

<Table 3> The summary design

Object	Subject	1 st Questionnaire	2 nd Questionnaire
Students	Control group 5th grade A-D class (N: 101)	• ‘Common ruler’, • ‘Problems with the grid’(In the Textbook)	• ‘Common ruler’, • ‘Problems with the grid’ (Academic achievement Test)
	Experimental group 5th grade E class (N: 23)	• ‘Bilateral Symmetric Ruler’, • ‘Problems without the grid’(new problems)	
Observation (Dependent variable)	(1) Understandings of Meaning of ‘Point Symmetry’ (2) Strategies & Errors of construction (Accuracy of construction) (3) Learning Effect of the ‘Bilateral Symmetric Ruler’ ① Convenience: Time of Construction ② Interest: Interview ③ Application: Free Construction(Creativity) ④ Learning Sustainability: Solve similar problems after a month.		

모든 학생들의 학습 목표 도달도를 측정하기 위해 1차 문항지를 배부하였다. 이 문항지는 본 연구자가 개발하고 초등수학교육 전문가 1명과 초등수학교육 석사학위 소지자 2명의 심의를 받아 작성되었다. 1차 문항지의 내용은 ‘점대칭도형의 개념 이해’에 관한 문항, ‘작도 능력’을 파악하는 문항, 자신의 ‘작도 전략’을 되돌아보고 설명’하는 정의적인 문항으로 구성하였다. 이때 작도에 걸리는 시간을 함께 측정하였다. 그리고 2차시 수업 중에 발견된 정례와 반례 응답을 한 학생들 중 3명 씩 선정하여 개별 면담 녹취를 하였고, 1차 문항지, 2차 문항지를 마친 후에 다시 한 번 개별 면담과 관찰이 이루어졌다. 면담의 내용은 자신이 사용한 작도 전략에 대한 상세한 설명과 왜 그 전략을 선택하였는지, ‘좌우대칭 자’를 사용하였을 때 어떤 점이 편리하였는지를 연구자에게 말로 자세히 설명하도록 하였다. 2차 문항지는 2차시 수업이 종료되고 1개월 후 학습지속력을 파악하기 위해 수학교과서와 같은 ‘모눈 있는 문항’으로 A초등학교 5학년 5개 반의 교사의 심의를 받아 작성되었고, 5학년 2학기 12월 학업성취도 평가 문항으로 활용되었다.

3. Methods

본 연구가 이루어지는 전 과정 동안 활용된 자료는 아래 <Table 4>에 정리하였다.

<Table 4> Utilized materials

Object	Utilized Materials		
Control Group	Common ruler, Graph paper, Mathematics Textbook (Problems with the grid)	1 st Questionnaire (A type)	2 nd Questionnaire, Problems with the grid (Academic achievement Test)
Experimental Group	‘Bilateral Symmetric Ruler’, White paper, Problems without the grid, Board marker(black, red)	1 st Questionnaire (B type)	

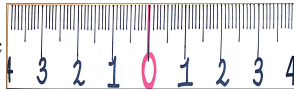
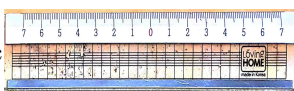
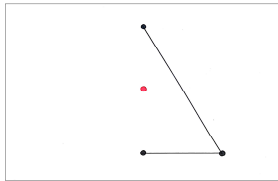
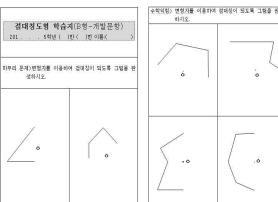
실험군을 위해 새롭게 제작한 ‘좌우대칭 자’는 <Table 5>과 같이 두 가지 크기로 제작하였는데, 교사용 大는 칠판에 부착하여 보드펜으로 그릴 수

있도록 하였고, 학생용 小는 눈금을 라벨지에 인쇄하여 일반 플라스틱 자에 부착하여 개별로 활용할 수 있도록 하였다.

그리고 백지 도화지를 준비하여 눈금 없이 자유롭게 점대칭도형을 작도하는 연습을 하였다. 8절 도화지는 칠판에 게시하여 보드펜으로 교사가 그리는 시범을 보이고 난 후, 대표 학생이 나와서 다시 그려보았다. 16절 도화지는 학생들 개개인 책상에 준비하여 연필, 빨간 펜으로 자유롭게 점대칭도형을 그려보았다.

학습이 모두 끝난 후에는 1차 문항지를 통해 학습 목표 도달도와 작도 시간을 측정하였는데 A형은 대조군을 대상으로 한 ‘모눈 있는 문항’이고, B형은 실험군을 대상으로 한 ‘모눈 없는 문항’이다. 2차 문항지는 두 집단에게 동일한 ‘모눈 있는 문항’이다.

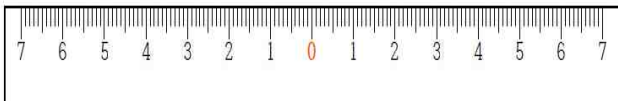
<Table 5> New materials for the experimental group

name	Photos	Detail
Teacher Bilateral Symmetric ruler (L)		400mm * 60mm
Students Bilateral Symmetric ruler (S)		140mm * 10mm (Left 7cm, Right 7cm)
Teacher Problems without the grid (L)		390mm * 270mm Unfinished Symmetric Figure for a Point for teaching
Students Problems without the grid (S)		290mm*270mm Unfinished Symmetric Figure for a Point For learning

4. Making the ‘Bilateral Symmetric Ruler’

이 자는 ‘함께 측정한다(symmetry)’는 대칭의 어

원에 기초하여 [Figure 5]와 같이 일반 플라스틱 자의 한가운데에 눈금 0을 그려 넣고 이를 중심으로 ‘같은 숫자’의 눈금이 좌측과 우측에 1-7cm까지 대칭된 눈금이 있는 총 길이 14cm의 학습 교구용 자이다. 특히 눈금 0은 학생들이 식별하기 쉽게 붉은색으로 표시되어 있고 이 지점을 대칭의 중심에 맞추어 작도한다.

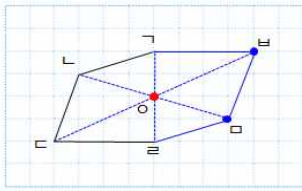
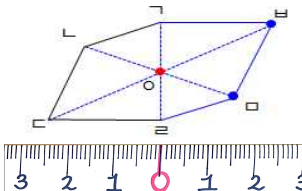


[Figure 5] Bilateral symmetric ruler

5. Making the ‘Problems Without the Grid’

기존 문항은 아래 <Table 6>과 같이 모든 대응점이 모눈에 맞추어 그려져 있어서 대칭의 중심로부터 거리를 측정하려면 직사각형의 대각선의 길이를 측정해야 한다. 그러나 이것은 대부분이 ‘무리수’가 나올 수밖에 없고 학생들은 측정에 어려움을 겪는다. 따라서 모눈을 없애고 인위적으로 꼭짓점(대응점)까지의 거리가 자연수(혹은 간단한 유리수)가 되도록 새로운 문항을 개발하였다.

<Table 6> Problems without the grid for the experimental group

Existing Problems	Problems without the Grid
	
Distance from center of symmetry to the vertex symmetry to the vertex (correspondence point) is (correspondence point) is 'rational number' or 'natural number' by the 'problems without the grid'.	

6. Data Analysis

본 연구는 <Table 7>과 같이 Han(1999, Park & Shin, 2006 retrieved)가 작도문제의 특성에 맞추어 수정한 Polya의 문제해결 4단계(분석-작도-증명-탐구)와 Park & Shin(2006)의 분석 방법을 따른다.

1) Analysis of Students' Understandings of the Meaning of 'Point Symmetry' (Understandings of Concept)

교과서의 ‘점대칭도형’의 정의를 익히고 ‘점대칭도형의 작도’ 방법을 학습한 대조군과 개발된 ‘좌우대칭 자’와 ‘백지’ 및 ‘모눈 없는 문항’으로 학습한 실험군이 점대칭도형에 대해 어떻게 이해하고 있는지 문항지를 작성하여 학생들의 개념 이해도를 ‘회전 대칭’과 ‘점 반사’의 의미로 분류하여 비교 분석하였다.

2) Analysis of Students' Strategies and Errors while Constructing (Accuracy of Construction)

두 집단의 점대칭도형 작도 문항의 응답 유형 및 작도 과정을 관찰하고 면담한 결과를 분석하여 작도 전략의 유형을 분류하고, 작도 할 때 생기는 오류의 발생 빈도와 유형을 비교 분석하였다.

3) Analysis of Learning Effect of the ‘Bilateral Symmetric Ruler’ (Convenience/Interest/Application/Learning Sustainability)

두 집단의 작도 과정을 관찰하고 면담하면서 ‘좌우대칭 자’의 학습 효과를 비교 분석하였다.

첫째, 작도에 걸리는 시간을 측정하고 개별 면담을 하여 개발된 도구의 편리성을 분석하였다.

둘째, 점대칭도형에 대한 정의적인 질문에 대해 문항지에 서술한 내용과 심층 면담 시 나타나는 태도를 통해 흥미도를 분석하였다.

셋째, 창의적인 모양의 점대칭도형을 스스로 그리는데 과제를 제시하여 응용력을 분석하였다.

넷째, 2차 문항지(학업성취도 평가)를 통하여 학습지속력을 분석하였다.

<Table 7> Data analysis method

Step Type	1 Step	2 Step	3 Step	4 Step
Modified 4 Steps of Polya's problem solving (Han, 1999)	Analysis	Construction	Proof	Research
Analysis Method (Park & Shin, 2006)	Recognize situations that require construction and explore construction strategies.	Thinking and Finding Activities	Confirmation and Reflective Thinking Activity after Construction	Application and Solving the new problems
	<Lesson 2/2> Guiding 'Bilateral Symmetric Ruler', Explore how to Construct	<Lesson 2/2> Free Construction using the 'Bilateral Symmetric Ruler', 'White paper'	<Lesson 2/2> Interview of Difficulty of Constructing	<Lesson 2/2> Creative Construction on 'White paper'
Analysis Method of This Study	<1st Questionnaire> No(1): Meaning of Symmetric Figure for a Point	<1st Questionnaire> No(2): Construction of Symmetric Figure for a Point 'without the grid' 'Time of Construction'	<1st Quest- ionnaire> No(3)(4): Affective Question (Explain how you constructed it and why you chose it)	<2st Quest- ionnaire> Academic achievement Test: 'Problems with the grid'
	Understandings of Concept	Accuracy of Construction, Convenience	Convenience, Interest	Application, Learning Sustainability

IV. Results and Discussions

1. Analysis of Students' Understandings of the Meaning of 'Point Symmetry' (Understandings of Concept)

대조군과 실험군의 1-2차시 학습이 모두 끝난 후 점대칭도형의 의미를 어떻게 이해하고 있는지 자유롭게 서술하는 문항지를 제시하였다.

<Table 8>와 같이 대조군과 실험군의 개념 이해도를 비교 분석한 결과 두 실험군 모두 180° '회전'이 동으로 이해하는 비율이 가장 높았는데 이는 1/2차시 때 도형을 실제로 180° 돌려보는 활동을 충분히 하면서 교과서 정의를 잘 익혔기 때문으로 분석된다.

반면 '점 반사'의 의미로 이해하는 비율은 대조군에 비해 실험군이 15.23% 포인트 더 높았다. 이는

대조군은 점대칭도형의 작도가 기계적으로 이루어져, 점대칭의 포괄적인 의미인 '점 반사'의 개념은 완전히 습득되지 않은 것으로 해석할 수 있다. '좌우대칭 자'를 활용하면 대칭의 중심을 기준으로 양쪽의 거리가 같은 실험을 충분히 했기 때문에 '점 반사'의 개념 이해가 높아졌다.

특히 <Table 9>과 같이 '회전', '점 반사' 두 의미를 모두 응답한 경우를 비교해 보았을 때 대조군에서는 3.96% 포인트가 두 의미를 모두 응답하였고, 실험군에서는 26.09% 포인트가 두 의미를 모두 응답한 것을 통해 실험군에서 '대칭'의 개념을 좀 더 폭넓게 이해하였음을 알 수 있다.

오류의 유형은 대조군의 4가지 유형에서 실험군의 3가지 유형으로 줄어들었고 오류의 비율도 13.32% 포인트 감소하였다. 이는 점대칭도형의 개념 이해도가 향상되었음을 알 수 있다. 무응답의 비율은 대조군과 실험군의 차이가 없었다.

<Table 8> Understandings of concept (permission for repetition)

Type	Contents	Control group (N: 105)		Experimental group (N: 35)		Deviation
180° 'Rotation' (Definition in Text book)	Something that is exactly the same as the first figure by rotating 180° about one point. (Refer to center of symmetry)	32/105 (30.48%)	64/105 (60.96%)	9/35 (25.71%)	22/35 (62.85%)	-4.77%
	Rotate 180° to be exactly the same shape as the first one.	32/105 (30.48%)		13/35 (37.14%)		6.66%
'Point Reflection' (Construction in Text book)	The line segments that correspond to each other are divided into two centers of symmetry.	2/105 (1.91%)		2/35 (5.71%)		
	Symmetric Figure about a point.	2/105 (1.91%)	8/105 (7.62%)	5/35 (14.28%)	8/35 (22.85%)	15.23%
	Draw a line based on the center of symmetry and connect the vertices to the half.	4/105 (3.80%)		1/35 (2.86%)		
Error	If you turn one side 180° by half-folding about the center point of the figure. (line symmetry) (Confused to line symmetry and point symmetry)	9/105 (8.57%)		1/35 (2.86%)		
	Same shape when rotated 360 degrees. (Angle error)	4/105 (3.81%)		-		
	Figures with the same size as the corresponding side.		29/105 (27.62%)		5/35 (14.30%)	-13.32%
	The Figure to draw with ruler, protractor, compass.	4/105 (3.81%)		1/35 (2.86%)		
	The Figure with corresponding points.					
	A figure based on a point.					
	Drawing along a point. Figures connected by points.	12/105 (11.43%)		3/35 (8.58%)		
	Line symmetry with points.					
No Response	No Response	4/105 (3.80%)	4/105 (3.80%)	0/35 (0%)	0/35 (0%)	-3.80%
Sum		105/105 (100%)	105/105 (100%)	35/35 (100%)	35/35 (100%)	

<Table 9> Responded to both 'rotation' & 'point reflection'

Type	Response Rate		Deviation
	Control group(N: 101)	Experimental group(N: 23)	
Both 'Rotation' & Point Reflection'	4/101 (3.96%)	6/23 (26.09%)	22.13%

2. Analysis of Students' Strategies and Errors while Constructing (Accuracy of Construction)

점대칭도형의 작도 능력을 평가하기 위해 대조군

은 '모눈 있는 문항', 실험군은 '모눈 없는 문항'을 제공하였다. 먼저 기존 교과서(수학책, 수의책) 또는 학습지의 6문항과 1차 문항지의 2문항을 평가한 후 작도 전략을 분석하고 정답률을 측정한 결과 <Table 10>과 같이 실험군이 대조군보다 정답률이 높았다. 학습 활동 시 교과서의 문항을 '모눈 없는 문항'으로 변형한 학습지의 정답률은 대조군과 실험군이 4.94% 포인트 차이로 실험군이 높았고, 학습이 종료된 후 1차 문항지 평가 결과 8.93% 포인트 차이로 정답률의 편차가 더 크게 실험군이 높은 정답률을 나타냈다. 이를 통해 '좌우대칭 자'를 사용할 때 작도의 정확도가 높아짐을 알 수 있다

<Table 10> Accuracy of construction

Accuracy of Construc tion	Response Rate				Deviation	
	Control group (N: 101)		Experimental group (N: 23)			
	Existing 1 st Textbook (6Questi ons)	Quest-Modified 1 st ionnaire (2Questi ons)	Quest-Modified 1 st ionnaire (2Questi ons)	Quest-Modified 1 st ionnaire (2Questi ons)	Exist / Modifi ed	1 st Questio nnaire
Regular	418/(101*6) (68.97%)	162/(101*2) (80.20%)	102/(23*6) (73.91%)	41/(23*2) (89.13%)	4.94%	8.93%
Counter (Error)	188/(101*6) (31.03%)	40/(101*2) (19.80%)	36/(23*6) (26.09%)	5/(23*2) (10.87%)	-4.94 %	-8.93 %
Sum	606/(101*6) (100%)	202/(101*2) (100%)	138/(23*6) (100%)	46/(23*2) (100%)		

<Table 11> Types of error

Type	Cause of Error	Response Rate				Deviation		
		Control group (N: 101)		Experimental group (N: 23)				
		Existing Textbook (6Questions)	1 st Questionnaire (2Questions)	Modified Textbook (6Questions)	1 st Questionnaire (2Questions)	Existing / Modified	1 st Questionnaire	
Symmetry	Conc	Line	30/(101*6)	30/(101*2)	1/(23*6)	-	-4.23 %	-14.8 %
	confusion		(4.95%)	(14.85%)	(0.72%)			
Distance Error	Visual Error	104/(101*6)	4/(101*2)	8/(23*6)	2/(23*2)	-11.3 %	2.37 %	
		(17.16%)	(1.98%)	(5.80%)	(4.35%)			
Miss of correspondance point.	Visual Error	35/(101*6)	2/(101*2)	21/(23*6)	1/(23*2)	9.44 %	1.18 %	
		(5.78%)	(0.99%)	(15.22%)	(2.17%)			
Irregular /no response	No under standing	19/(101*6)	4/(101*2)	6/(23*6)	2/(23*2)	1.21 %	2.37 %	
		(3.14%)	(1.98%)	(4.35%)	(4.35%)			
Sum of Errors		188/(101*6)	40/(101*2)	36/(23*6)	5/(23*2)	-4.94 %	-8.93 %	
		(31.03%)	(19.80%)	(26.09%)	(10.87%)			

먼저 <Table 12>과 같이 정례의 유형을 살펴보면 대부분의 학생들이 교과서에서 제시한 대로 ‘점 반사’의 원리로 작도하였다. 그러나 [Interview 1] 과 같이 학생들을 면담한 결과 ‘모눈 있는 문형’에서 작도한 대조군의 경우에는 점대칭도형의 정의인 180° ‘회전’의 의미로 직관적으로 ‘거꾸로 그리기’ 전략을 활용한 빈도가 높았다.

<Table 12> Types of strategies of construction

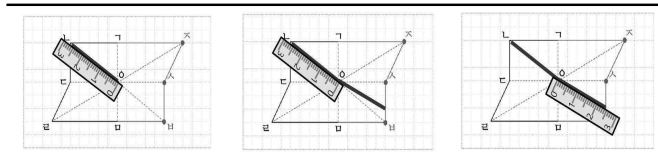
Types of Strategies	Control group	Experimental group
Using the Auxiliary line ('Point Reflection' (Construction in Textbook)		
Backward Construction (180° 'Rotation' (Definition in Textbook)		-
Drawing Error of the wrong Auxiliary line after Construction		
Line Symmetry		-
Visual Error (Distance Error /Miss of correspondance point)		

[Interview 1] Backward construction(by Student A1)

- 1 T : 여기 아무 표시가 안 되어 있는데 어떻게 그린거니?
- 2 A1: 여기 **끝에 부터** 시작해서 그리면 돼요. (눈으로는 문제에 이미 그려진 도형의 맨 위 선분을 주시하면서, 연필은 맨 아래에서 부터 위로 올라가며 반대로 그리는 시범을 교사에게 보여준다.)
- 3 T : 보조선 없이 바로 그리면 더 어렵지 않니?
- 4 A1: 이렇게 **거꾸로 돌렸다고** 생각하면 쉬워요.

<Table 11>, <Table 12>과 같이 반례(오류)의 유형별로 보았을 때 1차 문항지에서 대조군에서는 선대칭으로 그린 오류가 14.85% 포인트로 가장 높았던 반면 실험군에서는 선대칭으로 그린 오류가 0% 포인트였다. 그리고 대조군에서 기존 교과서 또는 학습지를 먼저 풀 때 거리 오차가 컸는데 그 원인을 관찰한 결과 첫째, 거꾸로 그리기 전략을 하다가 대응점의 위치를 놓쳐 중도 포기하거나 거리 오차가 난 경우가 많았다. 둘째, <Table 13>와 같이 일반 자 사용이 서툴러서 거리 오차가 난 경우가 있었다. 셋째, 눈금 계산이 어렵기 때문에 거리 오차가 난 경우가 있었다. 대칭의 중심에 눈금 3cm 지점 정도를 놓은 경우에 좌측으로 2.7, 우측으로 2.7의 눈금을 찾으려면 $3\text{cm}-2.7\text{cm}=0.3\text{cm}$ 지점과, $3\text{cm}+2.7\text{cm}=5.7\text{cm}$ 지점을 찾을 때 계산 오차가 발생하여 오류가 생겼다.

<Table 13> Process of distance error due to poor use of the ruler



- ① Find the point 2.7cm by aligning ruler. The angle is slightly changed so that it is not straight.
 ② Peel off the 2.7cm point again by aligning the 0 point to the left.
 ③ When Students find the 2.7cm point again by aligning the 0 point to the right, error occurs.

3. Analysis of Learning Effect of the 'Bilateral Symmetric Ruler' (Convenience/Interest/Application/Learning Sustainability)

1) Convenience of Construction

점대칭도형의 작도에 걸린 시간을 측정한 결과 <Table 14>와 같이 대조군이 실험군보다 30.20초 빨리 작도하였기 때문에 '좌우대칭 자'를 사용할 때 좀 더 작도 시간이 적게 걸리고 편리함을 알 수 있었다. 그리고 <Table 15>과 같은 이유로 편리한 점, 불편한 점을 응답하였다.

<Table 14> Time of construction (convenience of construction)

	Control group (N: 101)	Experimental group (N: 23)	Deviation
Average Time(sec)	120.53	90.33	-30.20

<Table 15> Interview with 'bilateral symmetric ruler' of experimental group

	Convenience	Inconvenience
Easy to find the point intuitively	It's easy to find the center of symmetry. It's easy to find the correspondence. Convenient to use.	Miss of correspondence point When there are many correspondence points, I would miss some points. Both right and left distance were not same.
Easy to understand the principle	Simple. If I draw a Auxiliary line from the center of symmetry, I can construct it easily.	Poor use of the ruler It's difficult to keep standing on the center of the symmetry.
Saving Time	I saved time for constructing.	The ruler is made by the paper, so I drew on the ruler.
Accuracy	I didn't confuse of same distance.	Etc

2) Interest of Construction

두 집단의 학습이 끝난 후 점대칭도형의 작도에 대한 정의적인 질문을 하여 <Table 16>, <Table 17>과 같이 '작도의 흥미도'를 분석해 본 결과 긍정적인 응답이 실험군에서 60.87% 포인트로 대조군의 46.53%보다 높은 것을 통해 '좌우대칭 자'로 점대칭도형을 그릴 때 흥미도가 높음을 알 수 있다.

<Table 16> Interest of construction symmetric figure for a point

	Control group (N: 101)	Experimental group (N: 23)
Positive	47/101(46.53%)	14/23(60.87%)
Negative	54/101(53.47%)	9/23(39.13%)
Sum	101/101(100%)	23/23(100%)

<Table 17> Interview & response of question about the interest of construction symmetric figure for a point

Control group	Experimental group
More fun than Line Symmetry.	Easy and Fun. Drawing auxiliary lines is not difficult and fun.
Upside down is amazing and interesting.	Originally, the point symmetry was difficult, but I understood it by using a bilateral symmetric ruler.
Easiest with line symmetry among all math.	It was new and amazing and fun. I thought of a horizontal scale.
Very hard and difficult It seems more difficult than $+-\times\div$.	Drawing tricky shapes
It seems to be complicated in my head.	
Negative There is a high probability of being wrong in Exam.	Sometimes I made mistakes.
More difficult than Line symmetry.	More difficult than Line symmetry.
(Because I need to draw the inverted shape)	

3) Application of Construction

대조군은 ‘모눈’ 위에서, 실험군은 ‘백지’에서 자유롭게 점대칭도형을 그려보는 심화 활동을 하였다. 그 결과 <Table 18>와 같은 응답이 나왔다. 점대칭도형만 되는 그림에 **O** 표시를 하였고, 선대칭이면서 점대칭인 도형은 아무 표시를 하지 않았다. 그리고 오류가 있는 그림에는 **X** 표시를 하였다.

먼저 대조군에서는 모든 수준의 학생들이 모눈에 얽매어 좌우가 대칭되고 180° 회전해도 같은 모양이 나오는 선대칭도형이면서 점대칭도형인 것을 많이 그렸다. 이것은 선대칭도형과 점대칭도형의 의미 분화가 다소 덜 된 것임을 알 수 있다. 그리고 다양한 모양의 점대칭도형을 그리는 유창성이 낮아 중 수준, 하 수준에서 제한 시간동안 점대칭도형을 그린 개수가 1~2개에 머무른 경우가 많았고, 길이의 오류도 많이 발생하였다.

반면 실험군에서는 위의 ‘좌우대칭 자’의 활용법을 익힌 후 자유롭게 점대칭도형을 그려보는 심화 활동을 하였을 때 학생들은 매우 창의적인 모양을 만들었다. 중 수준의 학생들도 대응점의 짝을 숫자로 표시하며 보조선을 활용해 쉽게 작도하였다. 특히 상 수준에서 중첩하여 그린 점대칭도형이 있었는데, 이것은 Cho & Joung(2013, p. 622)의 연구에 따르면 발도르프 교육의 기하교육에서 강조한 부분으로 복잡한 구조들을 풍성하게 탐구하고 있는 장면임을 알 수 있다.

<Table 18> Free drawings of symmetric figure for a point by the control group and experimental group

Level	Control group	Experimental group
i) High Level		
ii) Middle Level		
iii) Low Level		

4) Learning Sustainability of Construction

대조군과 실험군의 점대칭도형 ‘작도 학습지속력’을 파악하기 위해 실험이 끝나고 1~2개월 후 치러진 학업성취도 평가 문항 중 점대칭도형 작도 문항의 응답 경향을 아래 <Table 19>과 같이 분석하였

다. 그 결과 대조군은 1차 문항지 정답률 80.20% 포인트에서 2차 문항지(학업성취도 평가) 정답률이 80.20% 포인트로 변화가 없었고 실험군은 1차 문항지 정답률 89.13% 포인트에서 2차 문항지 정답률이 91.30% 포인트로 올라갔다. 오답의 유형도 대조군은 선대칭도형으로 그린 오류, 거리 오차, 대응점을 덜 찾은 오류, 불규칙 및 무응답의 4가지 유형이었으나, 실험군은 선대칭도형으로 그린 오류만 발생하였다. 따라서 대조군보다 실험군에서 학업성취도가 올랐으며 학습지속력도 오래 유지되었음을 알 수 있다.

<Table 19> Results of 1st questionnaire & 2st questionnaire (academic achievement test)

	Control Group (N: 101)		Experimental Group (N: 23)		Deviation	
	1st	2st	1st	2st	1st	2st
Questionnaire	162(101*2)	81/101	41/(23*2)	21/23	8.93%	11.10%
Correct	(80.20%)	(80.20%)	(89.13%)	(91.30%)		
Line	30(101*2)	8/101	-	2/23	-14.85%	0.78%
Symmetry	(14.85%)	(7.92%)		(8.70%)		
Distance	4(101*2)	7/101	2(23*2)	0	2.37%	-6.93%
Error	(1.98%)	(6.93%)	(4.35%)			
Miss of						
correspondence	2(101*2)	4/101	1(23*2)	0	1.18%	-3.96%
point.	(0.99%)	(3.96%)	(2.17%)			
Irregular	4(101*2)	1/101	2(23*2)	0	2.37%	-0.99%
/no	(1.98%)	(0.99%)	(4.35%)			
response						
Sum	222(101*2)	101/101	46(23*2)	23/23		
	(100%)	(100%)	(100%)	(100%)		

V. Conclusions and Implications

점대칭도형의 개념 이해와 작도에서 겪는 학생들의 어려움은 대칭의 포괄적인 의미인 ‘회전’, ‘반사’를 포함한 의미를 이해하지 못하는 데에서 비롯되었다. 이를 해결하기 위해 ‘점 반사’의 의미를 좀 더 쉽게 이해하고 작도할 수 있도록 ‘좌우대칭 자’와 ‘모눈 없는 문항’을 개발하였다.

먼저 ‘좌우대칭 자’의 활용은 다음과 같은 효과가 있었다.

첫째, ‘점대칭’의 개념을 폭넓게 이해할 수 있었다. 점대칭도형의 정의에서 나타난 ‘회전’의 의미와 한 점으로부터 같은 거리에 있다는 ‘대칭’ 중의 ‘반사’의 의미를 시각적이고, 경험적으로 익힘으로써 많은 학생들이 ‘점대칭’의 의미로 ‘회전’의 의미와 ‘점 반사’의 의미를 모두 말할 수 있었다.

둘째, 작도의 정확도를 높일 수 있었다. 같은 거리의 눈금을 측정하기 쉬운 도구를 활용하여 작도 방법을 정확하게 익힘으로써 보조선의 필요성을 절감하며 ‘점 반사’의 원리에 맞게 작도하면서 선대칭도형으로 그리는 오류, 거리 오차, 불규칙 및 무응답의 오류가 줄어들었다. 그러나 대응점을 덜 찾은 오류는 실험군에서 대조군보다 나은 효과를 나타내지 못했다.

셋째, ‘좌우대칭 자’의 학습 효과가 네 가지 측면(작도의 편리성, 흥미도, 응용력, 학습지속력)에서 있음을 알 수 있다. 작도에 걸리는 시간이 줄어들어 든 것을 통해 작도의 편리성이 높아졌음을 알 수 있었다. 정의적인 질문을 분석한 결과 실험군과 대조군에서 모두 선대칭보다 점대칭이 다소 어렵다는 응답이 나왔지만, 대조군에서 부정적인 응답의 비율이 53.47%로 과반 이상인 반면 실험군은 39.13%로 낮았다. 특히 심층 면담을 한 경우 대조군에서 점대칭 도형 작도에 대한 거부감을 매우 강하게 표현하였다. 반면 실험군에서는 ‘보조선 그리기가 어렵지 않고 재밌다.’ ‘수평지율이 생각났다.’ 는 응답을 통해 회전대칭의 의미에서 더 나아가 ‘점 반사’로서의 관점에서 흥미도가 높아졌음을 알 수 있었다. 또 자유 심화 활동 단계에서 다양한 점대칭도형을 그리는 것을 통해 점대칭도형을 그리는 응용력이 향상되었음을 알 수 있었다. 마지막으로 2차 문항지(학업성취도 평가)의 학업성취도가 높은 결과를 나타내어 위 교구를 활용할 때 학습지속력을 향상시킬 수 있음을 알 수 있었다.

다음으로 점대칭도형 작도의 기초 단계에서 ‘백지’ 또는 ‘모눈 없는 문항’을 활용할 때 아래와 같은 효과가 있었다.

첫째, 모눈이 없으면 보조선을 그리는 전략을 활용할 수밖에 없으므로 한 점으로부터 같은 거리를

찾는다는 ‘점 반사’의 의미에 집중하고 길이 양감에 집중할 수 있었다. 둘째, 대칭의 중심으로부터 거리가 무리수가 아닌 자연수 또는 간단한 유리수로 조정된 문항을 제시함으로써 정확한 길이 값의 측정이 쉬워졌다. 셋째, 복잡한 모눈선들로 인한 혼란이 줄어들어 선대칭도형으로 그리는 오류가 매우 감소하였다. 넷째, 칸을 세어보아야 한다는 부담감을 줄이고 보조선 전략을 빨리 떠올릴 수 있었다. 다섯째, 모눈의 눈금에 얽매이지 않고 자유롭게 창의적인 점대칭도형을 그릴 수 있었다. 그러므로 기초 학습 단계에서는 모눈 없는 백지에서 작도 활동이 충분히 이뤄질 필요가 있다.

한편 본 연구는 다음과 같은 제한점을 갖고 있다.

첫째, 본 연구에서 사용한 ‘좌우대칭 자’와 ‘모눈 없는 문항’은 기존에 없던 새로운 교구와 학습 자료로서 학생들의 관심을 끌었기 때문에 상대적으로 더 집중하여 학습이 이루어진 효과를 가져왔을 수 있다.

둘째, 본 연구에서 대조군의 인원수가 실험군의 인원수의 4배라서 양적 연구의 통계처리를 할 때 타당도와 신뢰도가 낮아지는 점이 있다.

이러한 제한점이나 부족한 점을 보완하여 보다 나은 후속 연구를 위하여 다음을 제안하고자 한다.

첫째, ‘좌우대칭 자’는 포괄적으로 대칭을 지도할 좋은 자료가 될 수 있다. 대칭의 중심을 기준으로 간단하고 쉽게 같은 거리를 측정할 수 있기 때문에 점대칭도형의 작도뿐 아니라 선대칭도형을 작도할 때에도 효율적인지 연구 실험을 해 볼 필요가 있다.

둘째, ‘좌우대칭 자’를 활용하여 같은 거리가 아니라 거리의 비를 고정시켜 ‘답음’ 지도에도 효율적으로 활용가능한지 연구할 필요가 있다. 변환의 가장 작은 단위의 군인 합동변환군에서 답음변환군으로의 확대를 경험적으로 학습할 수 있도록 위 교구를 활용할 수 있을 것이다.

References

- Allen, J. (2007). *Drawing geometry*. Edinburgh, Scotland: Floris Books.
- Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority. (2011). *The Australian curriculum: Mathematics*. Unpublished paper. <http://ncic.kice.re.kr/nation.dwn.std.nationList.do;jsessionid=D90BD814964A03DB2FDC0D3DEF396696>
- Burn, B. (1996). What are the fundamental concepts of group theory? *Educational Studies in Mathematics*, 31(4), 371-377.
- California State Board of Education. (2006). *Mathematics framework for California public schools: Kindergarten through grade twelve*. Sacramento, CA: California Department of Education. <http://ncic.kice.re.kr/nation.dwn.std.nationList.do;jsessionid=D90BD814964A03DB2FDC0D3DEF396696>
- Chang, H. (1997). A study on geometrical construction in middle school mathematics. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 7(2), 327-336.
- Chang, H. (2013). Study on the teaching of proofs based on Byrne's Elements of Euclid. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 23(2), 173-192.
- Cho, Y., & Joung, Y. (2013). A case study on the mentorship mathematics education for the gifted with construction based on the aesthetic experiences. - Focused on Waldorf Education -. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 16(3), 621-636.
- Choi, J., & Park, S. (2014). The effects on symmetric movements and self-directed learning attitude of mathematical instruction using GSP. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 18(3), 459-474.
- Farmer D. W. (2001). *Groups and symmetry: A guide to discovering mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Freudenthal. H. (1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. In A.G. Howson (Ed.), *Proceedings of ICME-2: Developments in mathematical education* (pp. 101-114). Cambridge, England: Cambridge University Press.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education, China lectures*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Han, G., & Shin, B. (2007). On symmetry of figures in elementary geometry. *Journal for History of Mathematics*, 20(2), 73-88.
- Han, I. (1999). How to solve the construction problem. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series E: Communications of Mathematical Education*, 9, 153-164
- Jin, S. (2013). Education of symmetry for elementary school students. *The Journal of Education Studies*, 50(2), 123-140.
- Kang, S., & Ko, B. (2001). The development of self-directed CAI using web - The main theme is the figure part of mathematics -. *Journal of The Korean Association of Information Education*, 5(1), 33-45.
- Kim, C., & Kang, J. (2017). A study on the meaning of construction in Euclid Elements. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 20(2), 119-139.
- Kim, G., & Kim, H. (2008). The Geometry Education of the Middle School Using the Activity Papers. *Journal of the Korean School Mathematics*, 11(3), 337-362.
- Kim, J., Kim, H., & Kim, S. (2006). *Light and wave*. Seoul: Hongrung Publishing Company, pp. 94-96.
- Kim, S. (2009). *Analysis of plane figure and solid figure 6th grader misconceptions and reasons for these misconceptions*. Unpublished master's thesis, Korea National University of Education, Chungbuk.
- Klein, F. (2004). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry*. (Hedrick, E. R. & Noble, C. A., Trans.). New York: Dover Publications. (Original work published 1908)
- Ko, S. (2016). *Comparison study on terms and definitions used in the geometry of Korea and the United States(EM)*. Unpublished master's thesis, Jeju National University, Jeju.
- Korean Mathematical Society. (2015a). Encyclopedia of Mathematics. *Symmetric Figure for a point*. <https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=3405298&cid=55642&categoryId=55642>
- Korean Mathematical Society. (2015b). Encyclopedia of Mathematics. *Transformation of point symmetry*. <https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=3405299&cid=55642&categoryId=55642>
- Kwon, M. (2018). *An analysis of mathematically gifted students' thinking characteristics in frieze pattern classification*. Unpublished master's thesis, Korea National University of Education, Chungbuk.
- Ministry of Education, Korea. (2015a). *Mathematics 5-2*. Seoul: Chunjae.
- Ministry of Education, Korea. (2015b). *Mathematics 5-2 teaching manual*. Seoul: Chunjae.
- Ministry of Education, Korea. (2015c). *Mathematics Curriculum*. Ministry of education notice 2015-74 [supplement8]
- Ministry of Education, Korea. (2018a). *Elementary School Curriculum*. Ministry of education notice 2018-162 [supplement2]
- Ministry of Education, Korea. (2018b). *Science 4-1*. Seoul: Bisang
- Ministry of Education, Korea. (2019). *2015 Deliberation Mathematics 5-2*. Seoul: Chunjae.
- Ministry of Education, Singapore. (2006a). *Mathematics syllabus primary*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division. <http://ncic.kice.re.kr/nation.dwn.std.nationList.do?sessionId=D90BD814964A03DB2FDC0D3DEF396696>
- Ministry of Education, Singapore. (2006b). *Secondary mathematics syllabuses*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division. <http://ncic.kice.re.kr/nation.dwn.std.nationList.do?sessionId=D90BD814964A03DB2FDC0D3DEF396696>
- Nam, J., & Park, S. (2002). Problem solving and teaching 'group concept' from the point of symmetry. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 12(4), 509-521.
- Ormrod, J. E. (2003). *Human learning (4th ed.)*. NJ: Merrill Prentice Hall.
- Pang, J., & Kim, Y. (2017). A comparative study on

- congruence and symmetry in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, Hong Kong, Finland, and Singapore. *The Mathematical Education*, 56(3), 235-255.
- Park, K. (2013). *Review of mathematical terms*. Namyangju, Gyeonggi Province: (Inc) Mathlove
- Park, M., & Shin, K. (2006). Development and application of learning materials of the construction unit in 7-B grade based on Clairaut's Elments de Gomtrie. *Journal for History of Mathematics*, 19(4), 117-132.
- Park, E. (2017). *Comparative study on the preferences of mathematics curriculum areas between elementary mathematically gifted student and non-gifted student*. Unpublished master's thesis, Daegu National University of Education, Daegu.
- Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery I*, New York: John Wiley & Sons.
- Ryu, S. (2001). Using Ways of the Experimental Computer Software in Geometry. *Res. Sci. Math. Educ.* 24, 1-20.
- Shin, H. (2017). *Symmetry: Galois testament*. Seoul: Seungsan.
- The Ministry of Education, Ontario. (2005). *The Ontario curriculum, grades 1-8: Mathematics*. Ontario, Canada: Queen's Printer for Ontario. <http://ncic.kice.re.kr/nation.dwn.std.nationList.do;jsessionid=D90BD814964A03DB2FDC0D3DEF396696>
- Wikipedia. (2019). *Point reflection*. https://en.wikipedia.org/wiki/Point_reflection
- Woo, Ch. (1998). *Revision Educational foundation of school mathematics: Middle*. Seoul: Seoul national University Press. pp. 155-337.
- Yaglom, I. M. (1962). *Geometric transformations I*. (Allen Shields, Trans.). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

[저자의 소속과 직위]

김순영 : 대구대실초등학교, 교사, 제1저자

이광호 : 한국교원대학교, 교수, 교신저자

과정 중심 평가 계획			판서 계획	
영역	내용	방법	2. 합종과 대정	
내용	점대정도형의 의미를 이해하여 '좌수대정'자를 활용하여 점대정도형을 그리는 원리를 말할 수 있는가?	관찰	* 좌수대정 자료 점대정도형을 그려봅시다. 	
과정	'좌수대정'자를 활용하여 점대정도형을 그릴 수 있는가?	관찰		
태도	신 있게 설명하면서 수학에 대한 흥미와 자식감을 보인는가?	관찰		

