Brain, Digital, & Learning
2018, Vol. 8, No. 4, 203-224.
https://doi.org/10.31216/BDL.2018.8.4.203

The Analysis of the Gaze Characteristics of 4th Graders who Explore the Function Table

Mihyeon Ahn(Teacher)[1] · Kwangho Lee(Professor)[2*]
· Hwajin Seo(Teacher)[3] · Young Joo Yoon(Professor)
Jeonju Pyeonghwa Elementary School[1] · Korean National University of Education[2]
Jeonju Songwon Elementary School[3] · Korean National University of Education[4]

<ABSTRACT>

The purpose of this study was to find out how 4th graders respond to the function table according to their functional thinking and characteristics of function tables. For the purpose, the researchers presented 24 function table tasks classified into 3 types and 2 shapes to 9 4th graders and conducted eye tracking experiments while the students solve the tasks. As a result of the study, first the students who think the function as a correspondence relationship considered two variables with similar duration on the function table, while the student who think the function as a recursive pattern intensively looked for the dependent variables more. Second, the students considered the two variable areas for similar duration in the far value search function table and the non-indextical function table, but they looked at longer the dependent variable area than the independent area in the basic function table. Third, the students tended to look at longer dependent variables than independent variables in vertical function table, but they considered the two variables for the similar duration in the horizontal function tables. Based on the results, this study suggested the implications for research and education related to functional thinking.

Key words : Function table, Eye movements, Functional thinking, Recursive pattern, Correspondence relationship, Type of function table, Shape of function table

Introduction

함수는 실세계와 수학을 조직하는 수단이 되기에 중요하며 실제로 학교 수학은 함수로 가득하다(Woo, 1998). 초등수학에서도 함수라는 용어가 직접적으로 사용되지는 않지만 규칙성 영역에서는 함수와 관련된 지도내용들이 많이 있으며 이를 통해 함수개념의 기초를 다지도록 하고 있다(Ministry of Education, 2015). 더불어 최근 대수적 사고의 맥락에서 함수적 사고를 강조하며 그와 관련된 연구도 국내외에서 많이 이뤄지고 있다(예: Blanton,

※ 이 논문은 2018년 국립대학 육성사업 교육연구프로그램(ERP)의 지원을 받아 연구되었음
* Corresponding Author : Kwangho Lee, paransol@knue.ac.kr
Received November 19, 2018; Reviewed November 30, 2018 Accepted December 11, 2018; Published December 31, 2018
ⓒ 2018. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2015; Choi & Oh, 2016; Pang & Lee, 2017; Pang & Sunwoo, 2016; Stephens, Fonger, Strachota, Isler, Blanton, Knuth & Murphy, 2017).

함수적 사고는 둘 또는 그 이상의 양들 사이의 관계에 초점을 두는 수학적 사고로(Blanton, Levi, Crites, & Drougherty, 2011; Smith, 2008; McEldoon, Cochrane-Braswell, & Rittle-Johnson, 2010), 두 변수 사이의 관계를 일반화하고 표현하며 추론한다는 점에서 초기 대수를 위한 진입로이자 수단이 될 수 있기에 중요성이 더욱 부각되고 있다(Carraher & Schiliemann, 2007). 여러 연구에서 함수적 사고를 신장시키기 위한 방안으로 말, 기호, 표, 그래프 등 다양한 수학적 표현의 활용과 변환을 강조하고 있는데(Blanton et al., 2011; Stephens et al., 2017), 그 가운데 함수표는 함수적 관계를 이해하고 탐색하는데 유용하여 함수적 사고 신장을 위한 출발점이 될 수 있다(Kim, 2017).

Kim (2017)에 따르면 2009 개정 교육과정에 따른 초등 수학 교과용 도서의 규칙과 대응 단원에서도 함수표의 빈칸을 상황맥락에 맞게 채운 후 두 양 사이의 대응 관계를 파악하고 이를 말이나 식으로 일반화하여 표현하게 하고 있다. 이렇듯 함수적 사고를 지도하기 위한 시작점에서 함수표가 큰 역할을 하는 것은 함수표에 정렬되는 두 양의 구체적인 산술값을 통해 함수적 관계 탐색이 용이하기 때문이며 또한 두 양의 값들이 집합별로 표현되므로 공변과 대응관계를 모두 이해하는데 도움이 될 수 있기 때문이다.

함수표와 관련된 연구들은 주로 함수적 사고를 기르기 위한 도구로 함수표를 사용한 후 시사점을 제공하였다. Kim, Pang(2015)와 Tanışlı(2011)은 비정렬 함수표를 사용하는 것이 대응관계 파악에 효과가 있었음을 드러냈고, Blanton et al. (2015)와 Stephens et al. (2017)는 함수표에서 관계를 탐색한 후 먼 대응값을 찾는 것이 대응관계를 일반화하는데 도움이 된다고 밝혔다.

함수표 자체에 초점을 둔 연구도 드물게 있었는데, Kim(2017)은 함수표에 대한 학생의 이해를 알아보기 위해 표를 만드는 것부터 관계를 서술하고 관계식을 표현하기까지 표를 사용하는 과정 전체를 포괄적으로 알아보았으며 특히 우리나라 학생들은 가로형 함수표를 많이 그린 반면, 국외에서 진행된 Brizuela & Lara-Roth (2002)의 연구에서는 학생들이 세로형 함수표를 주로 그린 것을 바탕으로 표의 형태에 따른 차이가 있는지에 대한 후속연구를 제언하였다. McEldoon, Cochrane-Braswell et al. (2010)은 정렬 함수표와 비정렬 함수표를 제시했을 때 함수관계를 포착하는 학생 반응의 차이를 확인하여 비정렬 함수표를 사용했을 때 학생들의 재귀적 패턴의 오답이 줄었음을 밝혔다. 한편, Blanton et al. (2015)와 Warren과 Copper (2006)는 함수표에서 대응관계를 파악하도록 하기 위해 함수표의 두 변수를 번갈아 보게 해야 한다는 지도전략을 소개하였지만, 실제로 학생의 시선을 확인한 것은 아니었다.

이상에서 살펴본 바와 같이 함수표가 가진 다양한 장점에도 불구하고 함수표에 관한 연구는 많지 않으며, 특히 선행연구에서 밝혀진 효과적인 교수전략을 반영한 다양한 함수표가 있음에도 이를 직접 비교한 연구는 없었다. 이에 본 연구에서는 다른 특성을 지닌 함수표를 제시하여 함수관계를 파악하는 학생 반응의 차이를 살펴보되, 학생의 응답에만 의존하지 않고 함수표를 보는 동안 두 양을 어떻게 탐색하는지 이해하기 위해 시선추적실험을 하였다. 또한 학생이 함수표에서 어떤 규칙을 파악하였는지 확인하기 위한 인터뷰를 병행하여 학생의 반응을 면밀하게 관찰하였으며 이를 바탕으로 대응관계의 교수·학습이나 연구를 위한 시사점을 제시하고자 한다.

Theoretical Background

Application of Eye-tracking Research

Hoffman(1998)은 시선고정의 결여가 항상 관심부족을 뜻하는 것도 시선고정이 반드시 관심을 의미하는 것도 아니지만 시선고정과 관심은 대부분 일치한다고 하였으며 그의 Eye-mind 가설에 따라 응시하는 곳이 관심을 갖고 생각하는 것과 관련된다는 많은 연구가 있다.

Bojko (2013)에 따르면 시선 행동은 두 가지 방식에 따라 이루어지는데, 첫째는 지식 중심의 하향식 주의로 사전경험이나 예상에 따라 목표와 관련된다고 생각되는 정보를 의도적으로 선택하여 보는 것이다. 실제로 수학교육분야에서도 학생의 사고나 전략에 따른 시선의 차이를 본 연구가 다양하게 이루어졌다. Lee, Lee(2015)는 방정식을 해결하는 학생들의 전략 변화와 시선도약의 변화를 확인하여 보고하였으며, Kim(2018)은 시각적 표현으로 나타낸 분수의 곱셈을 해석하는 학생들의 시선을 전략에 따라 질적으로 분류하여 보고하였다.

둘째는 자극에 의한 상향식 주의로 시선을 이끄는 무언가에 의해 비자발적으로 보게 되는 것이다. 예를 들어 마케팅과 관련하여 제품의 디자인이나 전시의 측면에서 소비자의 관심을 얼마나 불러일으키는지, 또는 제품 정보가 소비자에게 효율적으로 전달되기 위해 어떤 디자인의 포장이 나은지를 확인하기 위해 시선추적을 활용한 사례들을 확인할 수 있다. 수학교육분야에서도 시선추적기를 이용하여 여러 가지 곱셈 지도 모델에 따라 학생들의 이해수준이 다른 것을 확인한 Bolden, Barmby, Raine와 Gardner (2015)의 연구, 수모형과 수식을 가로로 배치하였을 때와 세로로 배치하였을 때의 학생들의 시각적 주의의 차이를 확인하고 나아가 학생들의 자연수 덧셈 알고리즘 이해에 차이가 발생하였음을 보고한 Kim과 Lee (2017)의 연구 등 자극에 따른 시선 및 학생 이해의 차이에 관한 연구가 있다.

하지만 함수표와 관련하여 학생들의 시각적 주의에 관한 연구는 아직 이루어지지 않았다. Warren & Cooper (2006)와 Blanton et al. (2015)는 함수표를 활용하여 대응관계를 파악하게 할 때 학생들이 하나의 변수 내에서만 규칙을 찾는 대신 두 변수를 가로질러 보게 하는 것이 중요하다고 하였지만 시선추적을 통해 함수표를 보는 시선을 확인한 것은 아니었다. 이에 본 연구에서는 함수표를 제시했을 때 학생들이 이를 어떻게 보며 규칙을 탐색하는지 분석하여 학생의 함수적 사고에 따른 차이와 함수표 자극에 따른 차이를 분석하고자 한다.

Functional Thinking

함수적 사고는 둘 또는 그 이상의 양들 사이의 관계에 초점을 두는 수학적 사고로(Smith, 2008; McEldoon, Cochrane-Braswell et al., 2010), 두 양 사이의 관계를 일반화하고 표현하며 추론하기를 포함한다(Blanton, et al. 2011). Blanton과 Kaput(2005)에 따르면 함수표가 제시되었을 때 학생들은 그 안에서 여러 가지 패턴을 발견할 수 있으며, 이때 함수 관계 파악과 관련하여 3가지 함수적 사고가 있다. 첫째는 수의 흐름 안에서 변화를 발견하는 재귀적 패턴, 둘째 두 가지 양이 동시에 어떻게 변하는지를 분석하고 그 변화를 함수 서술의 명시적이고 역동적인 부분으로 유지하는 데 기반을 두는 공변적 사고(예, “x가 1 커지면 y는 3 커진다.”, 셋째 변수 사이의 상관관계를 인식하는 것에 기초하는 대응관계(예, “y는 x의 3배이다.”)이다.

함수관계에 직면한 학생들은 초기에는 양 사이의 관계보다는 종속변수의 재귀적 패턴에 초점을 두는 경향이 있는데(Carraher, Martinez & Schliemann, 2008, Lannin, Barker & Townsend, 2006), 이는 특정한 상황에서만 유용하며 새로운 독립변수 값에 대한 종속변수 값을 예측하는 데는 효과적으로 사용될 수 없다(McEldoon, Cochrane-Braswell et al., 2010). 이를 가능하게 하는 것은 대응관계의 사고로 Stephens et al. (2017)에 따르면 대응관계는 초등수학교육에서 가장 우선적으로 중요하게 여겨지는 함수적 사고방식이며 초등학생도 대응 관계를 식별하고 표현할 수 있다고 하였다. 반면 공변적 사고는 중학생들에게 이점을 갖는다는 연구가 있긴 하나 초등학생을 대상으로 한 자신들의 연구에서는 아주 드물게 발견되었으며 대부분의 학생들은 공변적 사고를 우회하여(bypass) 대응관계 사고로 바로 진행했다고 하였다.

함수 관계 파악과 관련하여 함수적 사고를 이와 같이 분류하는 것에 기반을 둔 연구는 최근까지 국내외에서 활발하게 이루어지고 있다. Blanton et al. (2015)는 함수관계를 파악하고 일반화하는 6세 아동의 학습궤적을 보고하였으며, 앞서 언급한 Stephens et al. (2017)에서는 세 가지 함수적 사고를 보다 정교화하여 10가지 수준으로 분류하여 3~5학년 학생

들의 함수적 사고의 진행과정을 확인하였다. 국내에서도 학생의 함수적 사고 실태를 조사하거나(예, Kim & Pang, 2008; Pang & Lee, 2017; Choi & Pang, 2012), 교수학습 프로그램을 통해 함수적 사고를 신장시킨 연구가 많이 실시되었다(예, Pang & Sunwoo, 2016; Choi & Oh, 2016).

이를 바탕으로 본 연구에서도 함수관계파악과 관련하여 함수적 사고를 재귀적 패턴, 공변적 사고, 대응관계로 구분하고 그에 따른 학생의 반응 차이를 확인 한다.

Prior Researches on Function Table

함수를 언어, 기호, 그래프, 표 등으로 다양하게 표현하는 활동은 함수적 사고 개발에 도움이 된다. 그 가운데 함수표는 두 집합의 값들을 일목요연하게 정리한 것으로 함수적 관계를 인식하고 집중할 수 있도록 한다(Kim, 2017, Martinez & Brizuela, 2006). 실제로 Blanton et al. (2015)와 Tanışlı (2011)의 연구에서는 학생들이 제시된 표에서 패턴을 찾거나 독립변수와 종속변수 간의 관계를 파악하는 과정에서 함수적으로 사고하는 것을 확인할 수 있었다.

학자들은 함수표가 정보를 제공하는 특성과 함수적 사고의 관련성에 관한 다양한 연구를 해왔다(Kim, 2017, Brizuela & Lara-Roth, 2002; McEldoon, Cochrane-Braswell et al., 2010; McEldoon & Rittle-Johnson, 2010; Tanışlı, 2011). 다음 <Table 1>은 함수표와 관련한 학자들의 연구에서 나타난 표의 특성들을 정리한 것이다.

McEldoon, Cochrane-Braswell et al. (2010)는 변수가 순차적으로 제시된 함수표와 비순차적으로 제시된 함수표를 제시했을 때, 변수의 정렬 방식에 따라 함수관계를 파악하는 학생의 전략에 영향을 준다는 것을 확인하였다. Tanışlı (2011) 역시 함수표에서 종속 변수와 독립 변수의 값을 무작위로 선택하여 제시하면 학생들이 하나의 변수에 초점을 맞추는 대신 두 변수 간의 관계를 탐색할 수 있다고 하였다.

Blanton et al. (2015)는 학생들에게 먼 값을 찾게 하는 것이 함수관계를 파악하여 일반화하는데 도움이 된다고 하였으며, McEldoon과 Rittle-Johnson (2010)은 함수표를 이해하기 위한 6가지 기술 중 하나로 100번째 값과 같은 다양한 사례를 예측하는 것을 포함하여 주어진 규칙을 적용하는 것, 표에 대한 가능한 규칙을 선택하는 것, 다음 값을 예측하는 것, 함수표에서의 규칙을 기호로 표현하는 것을 제시하고 이를 적용한 과제개발을 통해 학생들의 함수적 사고를 확인하였다.

<Table 1> Analysis of previous studies on characteristic of function table

Author (Year)	Type(presenting variable)		Style	
	non-indexical	Far value	Horizontal	Vertical
Kim (2017)			○	
Blanton et al. (2015)		○		
Brizuela & Lara-Roth (2002)				○
McEldoon, Cochrane-Braswell et al. (2010)	○			
McEldoon & Rittle-Johnson (2010)		○		
Tanışlı (2011)	○			

Kim(2017)은 우리나라 학생들은 주로 가로형의 표를 만드는데 비해 Brizuela와 Lara-Roth (2002)의 연구에서는 학생들이 주로 세로형의 표를 만들고 있는 것을 확인하여 함수표의 형태가 학생들의 함수적 사고에 미치는 영향에 대한 연구가 필요하다고 제언하였다.

한편, [Figure 1]은 우리나라의 2009개정 교육과정에 따른 초등학교 4학년 교과서**에서 사용되는 함수표이다. 이 함수표에서는 독립변수가 규칙적으로 증가하며 1부터 6까지 초기의 가까운 대응관계 만을 탐색하게 하고 있으며, 이야기 맥락이 적용되어 있고

가로형으로만 제시되고 있다(Ministry of Education, 2014). 이에 본 연구에서는 교과서에서 주로 사용되는 함수표와 다양한 학자들이 제시한 교수전략이나 형태의 차이를 반영한 함수표에 대한 학생들의 반응의 차이를 확인해보고자 한다.

팔린 팝콘의 수	1	2	3	4	5	6
판매 금액	3000	6000	9000			

[Figure 1] Functional table used in the textbooks of the 4th grade of elementary school according to 2009 revised curriculum

Methods

Participants

C시 외곽의 소규모 초등학교에 다니는 4학년 학생 10명(여학생 7명, 남학생 3명)이 연구에 참여하였다.*** 아직 함수표와 두 수 사이의 대응관계를 학습하지 않은 4학년을 대상으로 실험을 하였으며, 실험에 참여한 학생들과의 인터뷰를 통해 두 수 사이의 대응관계를 학습한 적이 없음을 확인하였다. 시선보정(calibration) 및 유효성검증(validation)을 20분 이상 시도하였으나 눈이 너무 흔들려서 시선추적을 할 수 없었던 학생 1명은 실험에 참여하지 못하였고, 시선추적 결과 시선 추적률이 70% 미만인 학생 2명은 시선 분석에서 제외하였다. 따라서 정답률 및 응답시간과 같은 행동데이터의 분석은 9명을 대상으로 이루어졌으며, 시선 데이터의 분석은 7명을 대상으로 하였다.

Function Table Task for Eye-tracking

함수표를 보고 규칙을 찾아 빈칸에 들어갈 값을 생각해내는 과제 24개를 개발하였다. 두 변수 사이의 관계를 일반화하여 식이나 구두로 표현하는 것이 함수표를 보고 함수관계를 이해했는지 확인할 수 있는 가장 적절한 방법이겠지만, 여러 연구에서 초등학생들이 변수를 사용하여 양 사이의 관계를 일반화하여 표현하는데 어려움을 겪는다고 한데다가(Pang & Choi, 2016; Ha & Lee, 2011) 연구 참여자인 4학년 학생들이 규칙과 대응을 학습하기 전인 것을 고려하여 본 연구에서는 표의 빈칸에 들어갈 함수값을 찾게 한 후 시선추적과 인터뷰를 통해 학생의 사고과정을 이해하고자 하였다.

□	△
1	6
2	12
3	18
4	24
5	

□	△
1	6
2	7
3	8
...	...
15	

□	△
1	5
4	8
11	15
9	13
7	

[Figure 2] Type of function table; basic function table(at top), far value search function table(at middle), non-indexical function table(at bottom)

과제로 제시된 함수표는 유형, 형태에 따라 분류할 수 있다. 유형은 함수표의 대응쌍을 정렬하는 방식에

** 현재 4학년 학생들에게는 2015 개정 교육과정에 따른 교과용 도서가 적용되고 있으나, 2015 개정 교육과정에 따르면 대응관계는 5-6학년군에서 지도한다. 그러나 5학년은 아직 2015 개정 교육과정이 적용되지 않으므로 2009 개정 교육과정에 따른 교과용 도서를 확인하였다.

*** 시선추적실험에 참여하는 10명의 학생과 그 학부모에게 실험의 목적과 방법에 대해 안내하고 동의를 구하였다.

따라 기본형 함수표, 먼값찾기 함수표, 비색인 함수표로 분류할 수 있는데 [Figure 2], 기본형 함수표(basic function table(BT))는 첫 번째~다섯 번째 독립변수와 종속변수 쌍을 차례로 제시하고 다섯 번째 종속변수의 값을 빈칸으로 두었으며, 먼 값 찾기 함수표(far value search function table(FT))는 첫 번째~세 번째 독립변수와 종속변수 쌍을 차례로 제시한 후, 중략 기호(…)를 제시한 뒤 10번째나 15번째와 같이 먼 독립변수에 대응하는 종속변수 칸을 빈칸으로 두었다. 비색인 함수표(non-indexical function table(NT))는 독립변수와 종속변수 쌍 중 5개를 임의로 선택하여 비주기적으로 배열한 후 표의 마지막 종속변수 칸을 빈칸으로 두었다.

형태는 함수표의 대응쌍을 정렬하는 방향에 따라 가로형 함수표와 세로형 함수표로 나뉜다. 가로형 함수표는 표를 2행 6열로 그린 후, 표의 1행에 독립변수를, 표의 2행에 종속변수를 배열하였고, 세로형 함수표는 표를 6행 2열로 그린 후, 표의 1열에 독립변수를, 표의 2열에 종속변수를 배열하였다.

함수표의 독립변수와 종속변수에 일상적인 맥락을 담기도 하였는데 '오토바이의 수-오토바이의 바퀴 수'와 같이 맥락만으로도 규칙을 찾을 수 있는 경우는 지양하였고 '모둠의 수-모둠원의 수'와 같이 결국은 함수표에 제시된 수에서 규칙을 찾아야 하는 상황을 제시하였다. 이는 너무 구체적인 맥락을 제공하면 학생들이 함수표에서 규칙을 찾지 않고 상황 맥락만 고려하여 과제를 해결할 가능성이 있기 때문이었다. 이를 막기 위해 애초에 독립변수는 □, 종속변수는 △로 제시하기도 하였는데, 변수 자체에 대해 어려움을 느낄 것을 우려하여 과제의 반은 상황맥락으로, 나머지 반은 기호맥락으로 제시하였다.

2009 개정 교육과정 및 2015 개정 교육과정에서 규칙과 대응의 교수·학습상의 유의점으로 하나의 연산으로 표현되는 간단한 경우만 다루도록 하였으므로(Ministry of Education, Science and Technology, 2011; Ministry of Education, 2015), 본 연구에 사용된 함수표 과제에 내재된 함수규칙은 y=ax 또는 y=x+b로 제한하였으며 곱하거나 더한 수는 주로 2~7사이의 한 자리 수였다. 물론 제시된 함수 규칙에 따라 정답률의 차이가 나타난다는 연구가 여럿 있었으나 교육과정 상 동등하게 다루어야 하는 부분이라 생각하여 두 연산을 동등하게 제시하였다.

이렇게 개발한 검사 도구는 전문가를 통하여 적용된 함수규칙의 난이도를 검토하였고 예비검사를 실시하여 과제의 적절성을 확인하였다. 유형과 형태 이외에 맥락과 연산이 함수표의 특성을 좌우할 수 있을 만한 다른 요인으로 간주될 우려가 있기는 하지만, 본 연구의 자료 분석 과정에서 맥락과 연산에 따른 정답률과 응답시간, 시선에서 양적으로 유의미한 차이는 드러나지 않았으므로 연구 결과에서는 차이가 없는 것으로 간주하고 분석 결과를 제시하였다.

Data collection

본 연구는 개발한 함수표 과제를 모든 연구 참여자에게 동일하게 제시하여 반복 측정하는 피험자내 설계로 자료를 수집하였다. 이는 선행연구에서 학생들의 함수적 사고 수준이 주어진 문제 상황마다 다르게 나타날 수 있다고 하였기 때문에(Blanton et al., 2015), 사전에 동질 집단을 구성하는 것이 어려운 상황임을 고려한 결과이다. 만약 피험자 간 설계로 집단을 나눌 경우, 동질하지 않은 집단 사이의 능력 차이가 노이즈로 작용하여 결과에 영향을 줄 수 있기 때문이다(Lee & Lim, 2015).

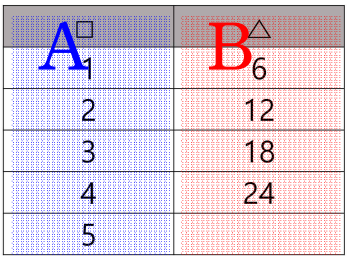
자료를 수집하기 전에 학생들에게 '표에 제시된 수를 보고 규칙을 찾아 빈칸에 들어갈 답을 이야기하는 문제'라고 과제를 설명하였으며 시선추적 방법과 유의사항에 대한 설명도 함께 진행하였다.

본 연구의 시선추적실험은 모니터 아래에 부착된 eye-tracker(Tobii 사의 X2-60)를 이용하여 진행되었으며, 24인치 모니터에서 대략 60~70cm 떨어진 곳에 학생의 안구가 위치하도록 한 후 시선보정(calibration)과 유효성검증(validation)을 실시하였다. 시선추적은 개별 참가자마다 1회 시행하였으며, 화면에 제시된 함수표 과제를 보고 빈칸에 들어갈 수를 구두로 응답하면 연구자가 키를 눌러 다음 과제로 넘겨주었다. 제시된 과제를 해결하는 동안 제한시간은 없었으며 모든 과제를 해결한 뒤 표에서 규칙을 어떻게 찾아 답하였는지 인터뷰를 진행하였고, 인터뷰 내용은 녹음하였다.

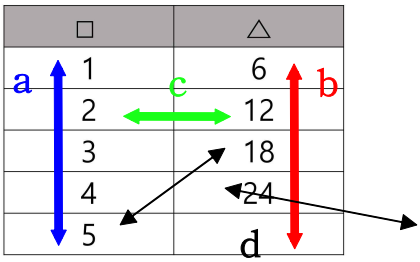
Data analysis

본 연구는 표의 특성에 따른 학생반응의 차이를 확인하고자 하였다. 표의 특성에 따른 차이를 통계적으로 확인하기 위해 비교할 요인이 3가지인 경우 반복측정 변량분석(ANOVA)을, 비교 요인이 2가지인 경우 대응표본 t-검정을 실시하였다. 양적 분석 결과를 뒷받침할 만한 근거로 학생들의 시선 히트맵, 개별 학생의 시선 궤적(gaze plots) 및 인터뷰 내용을 사례로 제시하기도 하였다.

시선추적 실험을 통해 행동데이터와 시선데이터를 수집하였다. 행동 데이터는 정답률과 응답시간이었고 모두 양적으로 비교하였다. 정답률이 매우 낮은 경우 오류에 대한 분석을 추가로 실시하였으며 이때는 학생이 제시한 오답과 인터뷰, 시선에 대한 질적 분석을 통해 학생의 사고과정을 이해하고자 하였으며 이를 사례로 제시하였다.



[Figure 3] AOI setting for (A) independent variable, (B) dependent variable



[Figure 4] Criteria for coding saccades in gaze plot; (a) X-X', (b) Y-Y', (c) X-Y, (d) other

시선 데이터는 Tobii Studio 3.3.1 프로그램을 통해 분석하였으며 시선고정을 식별하기 위한 필터 값으로 시각 각도는 0.5도, 최소 시선고정기간은 75ms로 설정하였다. 그리고 [Figure 3]에서처럼 함수표의 독립변수 영역과 종속변수 영역을 관심영역(Area of Interest(AOI))으로 지정하여 해당 영역에 시선고정이 이루어진 시간(total fixation duration(TFD))을 산출하여 비교하였다. 정답률이 높은 경우에 한하여 시선궤적(gaze plots) 영상을 보며 시선도약을 분류하여 그 수를 비교하였다. 시선도약을 분류하는 기준은 독립변수 내(X-X'), 종속변수 내(Y-Y'), 독립변수와 종속변수 쌍 사이(X-Y) 및 기타(예: 세트가 아닌 독립변수와 종속변수를 번갈아보거나(예: X_2-Y_4), 같은 수를 반복해서 보거나(X_n-X_n), 표 밖으로 벗어나는(out) 시선도약)로 하였다([Figure 4] 참조). 정답률이 낮은 경우에는 함수표를 보는 학생의 시선도약이 함수표의 특성이나 함수적 사고와 관계없이 제시된 함수표 위를 이리저리 일단 탐색하고 보는 경향이 있어 시선도약을 분류하여 양적으로 비교하기보다 학생의 사고의 흐름을 이해하기 위해 전형적인 시선 사례의 시선궤적(gaze plots)을 시간대별로 나누어 제시하였다.

Results and Discussions

Examples of Gaze Based on Functional Thinking

연구에 참여한 9명의 학생 중 인터뷰에서 재귀적 사고를 하는 학생은 5명이었다. 그 중 자신의 사고를 구두어로 잘 표현하고 가장 높은 시선추적률(94%)을 드러낸 학생 6을 재귀적 사고의 시선 사례로 제시하고자 한다. 대응관계 사고를 하는 학생은 학생 4와 학생 9 였다. 학생 4의 경우 시선 추적률이 63%로 낮아 시선분석 대상에서 제외하였으므로 시선사례를 제시하기 부적합한 반면, 학생 9는 인터뷰에서도 자신의 생각을 잘 표현하였고 시선추적률도 90%로 높아 학생 9를 시선사례로 제시하였다. 나머지 3명은 과제에 따라 일관되지 않은 함수적 사고가 드러났으며, 공변적 사고를 나타낸 학생은 한 명도 발견하지 못하였다. Stephens et al. (2017)의 연구에서 대부분의 초등학생이 공변적 사고가 발현되지 않은 채 대응관계 사고로 바로 진입했다

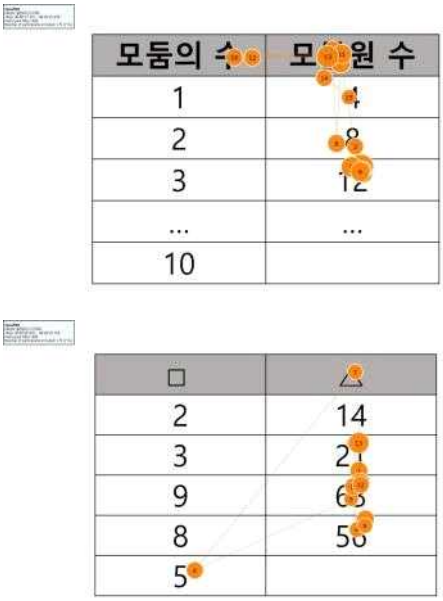
고 하였는데 이를 고려하면 연구 참여자의 수가 적은 본 연구에서 공변적 사고를 나타낸 학생을 발견하지 못한 것은 아쉽지만 당연한 결과라 할 수 있다. 이에 본 절에서는 시선추적과제에 대한 사후 인터뷰에서 함수적 사고를 일관되게 드러낸 두 학생(재귀적 패턴의 학생 6, 대응관계의 학생 9)의 시선 사례를 통해 학생의 함수적 사고에 따라 시선의 차이가 드러남을 설명하고자 한다.

우선 학생 6은 시선추적과제에서 BT과제에 대한 정답률은 100%(8/8)였으나, 먼 값을 찾는 FT과제는 한 문제만 맞추어 정답률 12.5%(1/8)였고, NT 과제의 경우 단 한문제도 맞추지 못하였다(정답률 0%(0/8)).

<Episode 1> Post-interview of student 6 in recursive pattern

면담자: (함수규칙 y=x+5인 세로형 BT를 가리키며) 이 표의 빈 칸에 들어갈 숫자는 어떻게 구했어요?
학생 6: (종속변수의 숫자를 가리키며) 6, 7, 8, 9, 10
면담자: 아, 그렇구나. (함수규칙 y=x×6인 가로형 BT를 가리키며) 그럼 이 문제는 어떤 규칙이 있나요?
학생 6: 6씩 뛰어서..
면담자: 어떻게요?
학생 6: 6에서 12가 되고, 12에서 6을 더하면 18이 되고, 18에서 6을 더하면 24....
면담자: (FT를 가리키며) 그러면 이 문제는 어떻게 풀까요?
학생 6: ...
면담자: (NT를 가리키며) 그러면... 이거 아까 풀었었죠? 어떻게 풀었나요?
학생 6: ... 모르겠어요.

<Episode 1>은 학생 6의 함수적 사고를 알아보기 위해 시선측정 실험 이후 진행한 사후 인터뷰이다. 함수규칙 y=x+5인 세로형 BT의 해결과정을 설명할 때 종속변수(6, 7, 8, 9)에만 초점을 맞춰 빈칸에 들어갈 수를 '10'이라 구하였다. 함수규칙이 y=x×6인 가로형 BT에서 역시 종속변수의 규칙적인 변화에만 집중하였는데, 첫 번째 종속변수에 6을 더하여 두 번째 종속변수가 되고, 다시 두 번째 종속변수에 6을 더하여 세 번째 종속변수, 세 번째 종속변수에 6을 더하여 네 번째 종속변수가 되는 규칙을 설명하였다. 독립변수에 대한 고려 없이 종속변수 값의 수열을 바탕으로 변화규칙을 설명하며 다음 종속변수 값을 구하는 학생 6의 사고는 재귀적 패턴에 해당한다고 볼 수 있다.



[Figure 5] Gaze plots of student 6; FT(at top), NT(at bottom)

그러나 BT와는 달리 FT와 NT의 규칙을 설명하도록 하였을 때는 자신이 응답했던 문제에 대해서도 어떤 규칙이 있는지 설명하지 못하였다. 비록 인터뷰에서는 자신의 답에 대해 설명하지 못하였지만, 시선을 바탕으로 학생의 오답에 대한 사고과정을 추측하면 재귀적 패턴에 의한 오류가 많은 것으로 생각된다. [Figure 5]은 학생 6이 함수표 과제를 보며 오답을 말하기 직전 5초 정도동안의 Gaze Plots(GP)이다. [Figure 5]의 왼쪽의 GP를 보면 FT 과제를 보고 종속변수인 4, 8, 12를 응시한 후 빈칸에 들어갈 종속변수 값을 16이라고 결정하였는데, 이는 독립변수인 10에 대한 고려 없이 단순히 마지막으로 제시된 종속변수 12에 4씩 커지는 재귀적 패턴의 규칙을 적용한 것으로 보인다. [Figure 5]의 오른쪽에 제시된 NT 과제의 GP를 보면 주로 종속변수인 14, 21, 63, 56을 주로 응시한 후 57이라 답하였는데, 무작위로 제시된 종속변수들 사이에서 일정한 규칙을 찾기 어려워지자 마지막으로 제시된 종

속변수 값인 56에 1을 더해 답한 것으로 추측하였다. Blanton, Levi, Crites 와 Dougherty(2011)는 재귀적 패턴에 따라 관계를 파악하는 학생은 변수 1개의 변화에만 초점을 둠으로 멀리 떨어진 독립변수에 대한 종속변수의 값을 알기 어려우며, 독립변수에 대해 어떠한 분석도 하지 않는다는 한계점이 있다고 하였는데, 이들의 주장이 FT와 NT에 대한 학생 6의 오답과 시선에 그대로 드러난 것으로 보인다.

반면, 학생 9는 BT, FT, NT 과제에 대한 정답률이 각각 75%(6/8), 75%(6/8), 87.5%(7/8) 로 참여한 학생들 가운데 가장 높은 평균 정답률을 기록하였다.

<Episode 2> Post-interview of student 6 in correspondence relationship

면담자: (함수규칙 y=x+3인 BT를 가리키며) 이 문제는 어떻게 풀었는지 설명해줄 수 있어요?
학생 9: 이거요? 이거 1부터...
면담자: 손으로 짚어도 돼요.
학생 9: (독립변수와 종속변수를 차례로 가리키며) 이렇게 이렇게 하면 3씩 커지길래 (독립변수 5에 대응하는 종속변수 빈칸을 가리키며) 여길 8이라고 했던 거 같아요.
면담자: (함수규칙 y=x×4인 BT를 가리키며) 그럼 이 문제는 혹시 어떻게 풀었어요?
학생 9: 이거는 곱셈을 했어요. 4곱씩 커지길래 (독립변수 5를 가리키며) 여기도 곱해가지고 20명이라고 했어요.
(중략)
면담자: (함수규칙 y=x+2인 FT를 가리키며) 그럼 이 문제는 어떨까요?
학생 9: 여기 이렇게 (독립변수와 종속변수를 차례로 가리키며)2씩 커지고, 2씩 커지고... (독립변수 14를 가리키며) 그래서 16했어요.
(중략)
면담자: (함수규칙 y=x×5인 NT를 가리키며)이런 문제는 어떻게 풀었어요?
학생 9: 으음.. 이 문제는... 얘는 10씩? 커지진 않고... 5배씩.. 커지는거 같은데... (독립변수 5에 대응하는 종속변수 빈칸을 가리키며) 얘가 25요.

<Episode 2>는 학생 9의 함수적 사고를 정확히 알아보기 위해 진행한 사후 인터뷰로 학생 9는 제시된 함수표과제에서 변수 사이의 일반적인 대응관계를 파악하여 함수규칙을 구어로 설명한 후 빈칸에 들어갈 수를 구하여 답하였다. 함수규칙이 y=x+3인 BT에서는 독립변수와 종속변수를 차례로 가리키며 '3씩 커진다'고 이야기한 후, 독립변수 5에 대응하는 종속변수의 값을 8이라고 답하였다. 함수규칙이 y=x×4인 BT에서도 마찬가지로 '4곱씩 커진다'고 규칙을 설명한 후, 독립변수 5에 대응하는 종속변수 값을 20으로 답하였다. BT 뿐만 아니라, FT와 NT에 대해서도 마찬가지로 대응관계를 파악하여 설명하였다. 함수규칙이 y=x+2인 FT에서도 2씩 커지는 일반적인 규칙을 발견한 후 독립변수 14에 대응하는 종속변수 값을 구하는데 함수규칙을 정신적으로 적용하여 16이라 답하였고, 함수규칙이 y=x×5인 NT에서 역시 5배씩 커지는 규칙을 찾아 독립변수 5에 대응하는 함수값으로 25를 제시하였다. Blanton et al. (2011)는 두 양 사이의 일반화된 관계를 파악하는 대응관계의 사고는 특정한 함수값(종속변수 값)을 쉽게 구할 수 있으며 이를 위해 다른 함수값을 알아야 할 필요가 없다고 하였다. 학생 9는 바로 이어질 다음 값을 찾는 BT 뿐 아니라 먼 함수값을 찾거나 임의의 함수값을 찾는 FT와 NT의 경우에도 주어진 독립변수와 종속변수 쌍 사이의 대응관계를 파악하여 함수규칙을 설명하고 이를 적용하여 답을 알맞게 찾을 수 있었는데, 이와 같은 학생 9의 사고는 Blanton et al. (2011)의 관점에서도 대응관계로 볼 수 있다.

함수적 사고에 따라 시선의 경향이 어떻게 다른지 확인하기 위해 서로 다른 함수적 사고 경향을 드러낸 학생 6과 학생 9의 시선을 분석한 결과를 <Table 2>에 제시하였다. 24개의 함수표 과제에서 독립변수 영역과 종속변수 영역을 각각 관심영역(Area Of Interest(AOI))로 지정하여 각 영역을 응시한 시간(Total Fixation Duration(TFD))을 통계적으로 비교하였다(n=24이므로 정규성 검정을 시행하였으며 p=.543, p= .857로 정규성 가정을 만족함). 학생 6은 24개의 과제를 해결하는 동안 독립변수 영역을 평균 3.324초 동안 응시하였고, 종속변수 영역은 평균적으로 7.936초 동안 응시하였다. 대응표본 t-검정 결과 두 변수 영역을 응시한 시간의 차이가 유의수준 .05에서 유의미하게 나타났다(t=-3.666, p=.001). 즉, 재귀적 패턴으로 규칙을 파악한 학생 6

<Table 2> Paired t-test results of TFD within two variable areas

Student	Mean TFD(sec)		Normality test (Shapiro-Wilk)		Paired t-test				
			d	p	평균 차	표준 편차	t	d	p
Student 6	독립	3.324	24	.543	-4.612	6.16257	-3.666	23	.001*
	종속	7.936							
Student 9	독립	3.552	24	.857	0.455	1.85418	1.202	23	.242
	종속	3.097							

은 함수표 과제를 해결하는 동안 종속변수 영역을 독립변수 영역보다 뚜렷하게 오래 응시하였다는 것을 의미한다.

반면, 학생 9는 24개의 과제를 해결하는 동안 독립변수 영역을 평균 3.552초 동안 응시하였고, 종속변수 영역은 3.097초 동안 응시하였다. 대응표본 t-검정 결과 두 변수 영역을 응시한 시간의 차이가 유의수준 .05에서 유의미하지 않은 것으로 나타났다(t=1.202, p=.242). 즉, 대응관계로 규칙을 파악한 학생 9는 함수표 과제를 해결하는 동안 독립변수 영역과 종속변수 영역을 비슷하게 응시하였다고 할 수 있다.

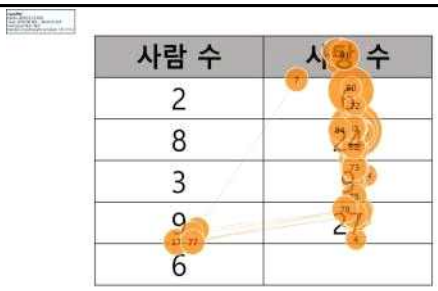
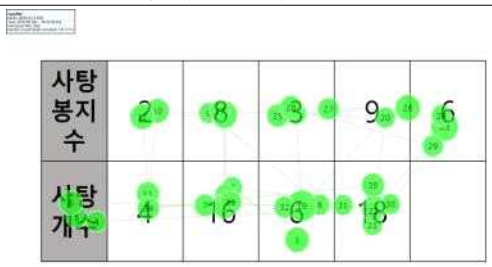
<Table 3>는 학생 6과 학생 9가 BT를 해결하는 동안의 독립변수와 종속변수를 탐색하는 시선도약(선)의 개수의 평균을 구하여 반복측정 ANOVA를 통해 비교한 결과를 제시한 것이다. FT와 NT의 경우 학생 6은 정답률이 매우 낮았기 때문에 높은 정답률을 보인 학생 9와 비교하는 것이 합리적이지 않다고 판단하여 BT의 시선도약 만을 분류하였다. 분석에 앞서, 반복측정 ANOVA의 기본 가정인 구형성을 검정하였으며 구형성 가정을 만족시켰다(각각, p=0.098, p=0.998). 반복측정 ANOVA 분석 결과, 학생 6은 독립변수 내, 종속변수 내, 독립변수와 종속변수 사이를 탐색하는 시선도약의 개수에 유의미한 차이가 있었던 반면(F=11.142, p=.001), 학생 9는 시선도약 개수 사이에 뚜렷한 차이가 없었다(F=.75, p=.49). 유의미한 차이가 있었던 학생 6의 경우 최소유의차(LSD)에 의한 사후 검정 결과 종속변수 내를 탐색하는 시선도약(Y-Y')이 독립변수 내의 시선도약(X-X')과 독립변수와 종속변수 쌍 사이의 시선도약(X-Y)에 비해 유의미하게 높았다(p=.024, p=.004). 즉, BT를 해결하는 동안 재귀적 패턴의 학생 6은 종속변수 영역 내에서 시선도약이 나타나는 경향이 뚜렷하게 높았던 반면, 대응관계의 학생 9는 독립변수, 종속변수, 그리고 그 사이를 탐색하는 시선이 골고루 나타났다고 할 수 있다.

<Table 4>는 학생 6과 학생 9가 함수표 과제를 해결하는 동안의 시선을 시각화한 GP로, 학생 6은 BT를 해결하는 동안 종속변수 영역 안에만 시선고정점 29개가 모여 있고, 독립변수 영역을 전혀 응시하지 않고 문제를 해결했기 때문에 시선도약은 종속변수 내에서만 발생하였다(<Table 4> 왼쪽 위 참조). 이는 <Table 2>와 <Table 3>의 결과를 뒷받침하는 사례이다. 한편, 학생 6은 NT에서도 종속변수에 더 많은 관심을 나타내었는데, <Table 4>의 오른쪽 위 GP를 보면 독립변수 영역은 네 번째, 다섯 번째 칸에서만 4개의 시선고정이 있었고 종속변수 영역은 80번의 시선 고정이 집중되어 있어 <Table 2>의 결과를 지지한다. NT의 경우 낮은 정답률로 시선도약을 양적으로 비교하지는 못하였지만,

<Table 3> Repeated measure ANOVA results of the number of saccades in BT

Student	X-X'	Y-Y'	X-Y	Sphericity test		Repeated measure ANOVA		Post-hoc (LSD)	
				d	p	F	p	results	p
Student 6	3.5	13.25	1.25	2	0.098	11.142	0.001*	Y-Y'>X-X'	0.024*
								Y-Y'>X-Y	0.004*
								X-X'>X-Y	0.185
Student 9	4.875	6.5	7	2	0.998	0.75	0.49		

<Table 4> Gaze plots of student 6 and student 9; BT(at left), NT(at right)

학생 6	 응답: 20 (정답) 독립변수 영역 시선고정점: 없음 종속변수 영역 시선고정점: 29개	 응답 : 12 (오답) 독립변수 영역 시선고정점: 4개 종속변수 영역 시선고정점: 80개
학생 9	 응답: 20 (정답) 독립변수 영역 시선고정점: 21개 종속변수 영역 시선고정점: 22개	 응답 : 12 (정답) 독립변수 영역 시선고정점: 15개 종속변수 영역 시선고정점: 20개

독립변수인 9와 종속변수인 27을 몇 차례 번갈아보았을 뿐 다른 변수 쌍은 탐색하지 않았다. 즉, 재귀적 패턴의 학생 6의 관심이 종속변수 영역 내에 더 집중되어 있고 시선도약 역시 종속변수 내에 집중되어 있어 독립변수와 종속변수를 의미 있게 연결 짓는 사고과정은 잘 드러나지 않는 것을 시각적으로 확인할 수 있다.

반면, 학생 9는 <Table 4>의 왼쪽 아래 과제를 해결하는 동안 독립변수에 21번의 시선고정(점)이 이루어졌고, 종속변수 영역에도 22번의 시선고정이 있었다. 또한 오른쪽의 NT 과제를 해결할 때에도 독립변수 영역은 15번, 종속변수 영역은 20번의 시선고정이 이루어졌다. 즉, 대응관계의 사고를 하는 학생 9는 <Table 2>에서의 양적 결과에서처럼 두 변수 영역에 비슷하게 관심을 두고 있음을 시각적으로 확인할 수 있다. 또한 두 변수 영역을 번갈아보는 시선도약(선)이 눈에 띄게 많은데, 단순히 많은 것을 떠나 주어진 4개의 변수 쌍을 골고루 대응시켜 탐색하고 있음을 알 수 있다. 이러한 시선은 독립변수영역과 종속변수 영역을 응시하는 동안 두 변수를 관련짓기 위해 두 변수 쌍을 번갈아보며 주어진 사례를 골고루 탐색하고 모든 사례에 적용할 수 있는 규칙을 찾으며 대응관계를 파악하고 있는 것으로 보인다. 이러한 시선 데이터는 대응관계를 파악하기 위해서는 두 변수 영역을 가로질러 보아야 한다(Blanton et al., 2015; Warren과 Cooper, 2006)는 연구자들의 의견을 시선추적을 통해 직접 입증한 것이라 할 수 있다.

비록 함수적 사고별로 전형적인 한 학생의 사례만을 분석한 결과이기는 하지만, 함수적 사고에 따라 함수표를 보고 관계를 파악하는 시선에 차이가 있었다. 재귀적 패턴의 사고를 하는 학생의 경우 독립변수 영역보다 종속변수 영역을 더 오래 응시하였고 종속변수 내의 시선도약이 뚜렷하게 많았다. 대응관계의 사고를 하는 학생의 경우에는 독립변수 영역과 종속변수 영역을 응시하는 시간의 차이가 뚜렷하지 않았으며, 독립변수 영역 내, 종속변수 영역 내, 독립변수와 종속변수 쌍 사이의 시선도약 역시 큰 차이 없이 골고루 이루어 졌다.

<Table 5> Repeated measure ANOVA results of correct response rate and response time by type

	BT	FT	NT	Sphericity test		Repeated measure ANOVA		Post-hoc (LSD)	
				d	p	F	p	results	p
correct response rate (%)	86.1	22.2	36.1	2	0.079	14.603	0.000*	BT>FT	0.004*
								BT>NT	0.036*
								FT<NT	0.253
response time (sec)	13.02	18.82	22.59	2	0.282	5.054	0.020*	BT<FT	0.052
								BT<NT	0.035*
								FT<NT	0.187

Examples of Gaze Based on Characteristic of Function Table

정답률과 응답시간을 통해 함수표의 특성에 따른 난이도를 확인하였으며, 시선반응은 함수적 사고에 따라 독립변수 영역과 종속변수 영역에 대한 관심이 달랐던 4.1의 결과를 바탕으로 독립변수 영역과 종속변수 영역을 관심영역(AOI)으로 지정하여 해당영역을 응시한 시간(TFD)을 비교하였고, 이를 뒷받침하는 시선 사례를 함께 제시하고자 한다.

함수표 유형에 따른 학생의 반응

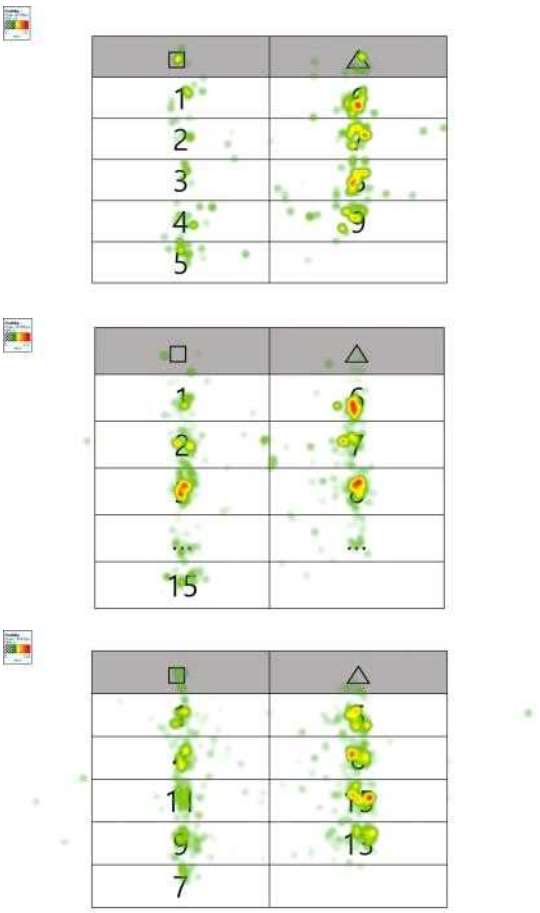
함수표 유형에 따라 정답률과 응답시간을 반복측정 ANOVA로 비교한 결과를 <Table 5>에 제시하였다. 반복측정 ANOVA 분석의 경우 구형성 가정을 만족시켜야 하는데, 검정결과 정답률과 응답시간 모두 구형성 가정을 만족시켰다(각각, p=0.079, p=0.282). 분석 결과, 유형에 따른 정답률은 유의미한 차이가 있는 것으로 드러났다(F=14.603, p=.000). 이를 최소유의차(LSD)에 의한 사후검정을 통해 확인한 결과, BT의 정답률(86.1%)이 FT의 정답률(22.2%)과 NT의 정답률(36.1%)보다 유의미하게 높았으며(각각 p=0.004, p=0.036). FT의 정답률(22.2%)은 NT 정답률(36.1%)보다 낮았지만 통계적으로 유의하지는 않았다(p=0.253). 즉, 아직 함수표에서 대응관계를 학습하지 않은 학생들도 BT는 쉽게 해결할 수 있고, FT와 NT는 BT에 비해 어려워 한다고 할 수 있다. 유형에 따른 응답시간의 차이 역시 유의미한 것으로 나타났는데(F=5.054, p=0.020), 최소유의차(LSD)에 의한 사후검정을 통해 확인한 결과, FT의 응답 (18.82초)이 BT의 응답시간(13.02초)보다는 길고, NT의 응답시간(22.59초)보다는 짧았지만 통계적으로 유의미하지는 않았다(각각 p=0.052, p=0.187). 그러나 BT의 응답시간(13.02초)은 NT의 응답시간(22.59초)보다 통계적으로 유의미하게 짧았다(p=0.035).

함수표 유형에 따른 학생들의 시선 특징을 알아보기 위해 각 유형별 독립변수와 종속변수 영역의 평균 TFD를 대응표본 t-검정을 통해 비교하여 <Table 6>에 제시하였다. 시선추적 성공률이 80% 이상인 7명을 대상으로 분석을 하였으므로 분석에 앞서 정규성 검정을 실시하였고, BT, FT, NT의

<Table 6> Paired t-test results of TFD within two variable areas by type

Type	Mean TFD (sec)		Normality test (Shapiro-Wilk)		Paired t-test				
			d	p	평균 차	표준편차	t	d	p
BT	독립	2.70	7	0.258	-3.19	2.675	-3.156	6	0.020*
	종속	5.89							
FT	독립	6.61	7	0.832	1.49	2.992	1.316	6	0.236
	종속	5.12							
NT	독립	5.92	7	0.183	-3.03	3.697	-2.168	6	0.073
	종속	8.95							

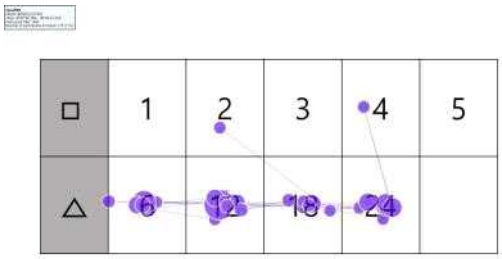
TFD가 모두 정규성 가정을 만족하였다(각각, p=0.258, p=0.832, p=0.183). BT의 경우, 독립변수영역의 TFD(2.70초)가 종속변수 영역의 TFD(5.89초)보다 더 짧았으며, 그 차이는 통계적으로도 유의했다(t=-3.156, p=0.020). FT의 경우 독립변수영역의 TFD(6.61초)가 종속변수 영역의 TFD(5.12초)보다 좀 더 길었는데, 통계적으로 유의하지는 않았다(t=1.316, p=0.236). NT의 경우, 독립변수 영역의 TFD(5.92초)가 종속변수 영역의 TFD(8.95초)보다 짧았으나, 유의미한 차이는 아니었다(t=2.168, p=0.073). 즉, 학생들은 BT과제를 제시하면 종속변수 영역에 더 많은 관심을 두어 문제를 해결하는 경향이 있고, FT나 NT 과제를 제시하면 두 변수 영역을 유사하게 응시하며 문제를 해결하였다.



[Figure 6] Absolute gaze duration heat map; BT(at top), FT(at middle), NT(at bottom)

[Figure 6]은 학생들이 함수표를 응시한 곳과 그곳을 응시한 시간을 누적하여 색상으로 시각화하여 표현한 절대시간 히트맵이다. [Figure 6]의 함수표들은 모두 기호맥락이며 함수규칙이 덧셈인 과제로, [Figure 6] 위쪽 BT의 경우 학생들이 독립변수 영역 보다 종속변수 영역에 많은 관심을 두고 있었음을 시각적으로 확인할 수 있다. 이는 BT를 해결하는 동안 학생들이 종속변수 영역을 유의미하게 오래 보았다는 <Table 6>의 양적 결과를 지지한다. 반면 오른쪽 위의 FT와 왼쪽 아래의 NT의 경우 독립변수 영역과 종속변수 영역에 대한 관심의 차이가 BT에 비해 뚜렷하게 드러나지 않는다. 이 역시 FT와 NT를 해결하는 동안 두 변수 영역을 응시한 시간(TFD)에 유의미한 차이가 없다는 <Table 6>의 양적 결과를 지지한다.

이상의 분석에 따르면, BT의 경우 정답률과 응답시간이 다른 함수표와 뚜렷하게 다른 양상이 나타났고, 변수영역별 TFD를 비교한 결과 역시 다른 함수표들과는 달리 종속변수에 더 집중하는 경향이 뚜렷하게 드러났다. 다만 FT와 NT를 비교한 결과에서 정답률과 응답시간에 뚜렷한 차이가 없었으며, 변수영역별 TFD를 비교한 결과에서도 둘 다 각각의 변수 영역에 대한 관심의 차이가 양적으로 드러나지 않았다. 그러면 FT와 NT 사이의 차이는 어디에 있는가? 이 두 유형의 경우 정답률이 낮았기 때문에 오답에서 나타나는 학생들의 경향을 통해 두 유형에 대한 학생들의 반응의 차이를 짐작할 수 있었다.



[Figure 7] Gaze Plots of Student 8 who solved BT

[Figure 7]은 학생 8이 BT과제를 해결하는 동안의 GP이다. BT의 GP를 보면 학생 8이 종속변수인 6, 12, 18, 24에 대부분의 관심을 두면서 재귀적 패턴

을 파악하여 알맞은 답을 구할 수 있었던 것으로 보인다. 실제로 학생 8은 BT과제에서 87.5%(7/8)로 높은 정답률을 기록하였다.

① 0~7초

모둠의 수	모둠원 수
1	4
2	8
3	12
.	...
10	

② 7~17초

모둠의 수	모둠원 수
1	4
2	8
3	12
...	...
10	

[Figure 8] Gaze Plots of Student 8 who solved FT

반면, 재귀적 패턴으로는 해결하기 어려운 FT와 NT에서는 0%의 정답률을 기록했는데, 응답은 매우 다른 경향이 나타났다. 모든 FT과제에 대해 학생 6의 사례에서와 같이 재귀적 패턴의 오답을 제시하였고, NT에서는 모두 모른다고 응답하였다. [Figure 8]은 학생 8이 FT과제를 해결하는 동안의 GP이다. [Figure 8]의 왼쪽은 과제가 제시되고 처음 7초 동안의 GP인데, 몇 차례 종속변수영역을 보기는 했으나 시선영상을 통해 파악한 시선의 흐름은 주로 독립변수에 초점을 둔 것으로 파악되었다. 처음에 종속변수인 4와 8을 응시한 뒤 독립변수 영역으로 넘어가 독립변수 영역을 위 아래로 훑어보며 오랫동안 탐색하다가 다시 4를 보고 다시 독립변수로 돌아와 훑어보다가 또다시 4를 보았는데, 이때 4를 향하는 시선도약이 대각선 방향인 것으로 보아 종속변수와 독립변수를 짝 지어 보는 시선도약(X-Y)은 아니었다. [Figure 8]의 오른쪽은 왼쪽 그림 이후부터 과제에 답하기 전까지(약 10초 동안)의 시선인데, 전적으로 종속변수 영역만 탐색하고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 탐색의 결과로 학생 8이 제시한 응답은 '16'이었다. 이는 초반 7초 동안 관심을 두었던 독립변수와는 별개로 답하기 전 10초 동안 탐색한 종속변수 4, 8, 12에서 발견한 4씩 커지는 규칙을 그대로 적용하여 답한 것으로 생각된다. 학생 8은 다른 FT 문항에서도 모두 재귀적 패턴의 오답을 제시하였는데, 이는 BT에서의 재귀적 패턴의 사고를 FT에도 그대로 적용한 것으로 보인다.

① 0~12초

□					
△	10	15	40	35	

② 12~17초

□	2	3	8	7	5
△	10	15	40	35	

③ 17~22초

□	2	3	8	7	5
△	10	15	40	35	

④ 22~25초

□	2	3	8	7	5
△	10	15	40	35	

⑤ 25~35초

□	2	3	8	7	5
△	10	15	40	35	

[Figure 9] Gaze Plots of Student 8 who solved NT

[Figure 9]는 NT를 제시했을 때 학생 8의 GP이다. 처음 12초 동안 독립변수 영역을 탐색하다가 규

칙을 찾지 못하자, 그 뒤 5초 동안은 종속변수 영역을 탐색하였다. 종속변수 영역에서도 규칙을 찾지 못하자 다시 독립변수 영역을 다시 5초가량 탐색하였다. 이후 3초 동안 독립변수와 종속변수를 짝지어(2와 10, 3과 15) 잠시 탐색하였지만, 응답하기 전 마지막 10초간은 다시 종속변수를 탐색하였으며 끝내 모르겠다고 응답하였다. 학생 8은 다른 NT 문항 전부에 대해 모르겠다고 응답하였는데, 재귀적 패턴으로는 규칙을 찾을 수 없는 NT임에도 불구하고 자신의 사고 수준을 그대로 유지하며 각각의 변수영역 안에서의 변화를 따로 탐색하다 두 변수의 대응관계를 파악하지 못한 것으로 보인다. 다만, 재귀적 패턴으로 규칙을 찾을 수 없다는 것을 깨닫고 모르겠다고 응답한 것은 자신의 사고 수준에서 해결할 수 없는 문제임을 인정한 것으로 다른 방법의 학습으로 학생을 이끌 여지가 있다는 점에서 의미가 있다. 실제로 학생 8이 잠시나마 두 변수를 대응시켜 번갈아 본 것이 자신의 사고인 재귀적 패턴을 전환하려는 시도가 될 수 있어 보인다. 두 변수를 대응시켜 번갈아 보는 것은 함수적 사고에 관한 연구를 실시했던 여러 학자가 강조하였으며(Blanton 외, 2015; Warren과 Cooper, 2006), 실제로 대응관계의 사고를 한 학생 9의 GP에서 두 변수를 대응시켜 번갈아보는 시선도약이 재귀적 패턴의 사고를 한 학생 6의 GP보다 많이 발견되었기 때문이다(4.1 참조).

학생 5는 BT와 FT에서 학생 8처럼 재귀적 패턴의 시선이 나타났지만, NT에서는 학생 8보다 한발 더 나아가 대응관계를 파악하는 시선이 나타난 학생이다. BT와 FT의 정답률은 학생 8과 똑같았으며, FT 문항의 오답까지도 학생 8처럼 재귀적 패턴의 오류를 나타내었다. 하지만 NT에서는 학생 8과는 달리 62.5%(5/8, 3문항은 무응답)의 정답률을 나타냈고, 과제를 해결하는 동안의 시선 역시 학생 8과 사뭇 달랐다. [Figure 10]의 왼쪽은 학생 5가 FT과제에 답하기 직전 6초 동안의 GP로, 앞의 [Figure 8]에서 확인한 학생 8의 답하기 전 10초 동안의 시선과 유사하게 종속변수 내의 변화를 탐색하는데 집중한 것을 확인할 수 있다. 그러나 [Figure 10] 오른쪽의 NT과제를 해결하는 학생 5의 GP를 보면 1과 5를 짝지어 본 후, 4와 8, 11과 15, 9와 13을 잇달아 짝지어 보는 시선을 확인할 수 있고, 그 후 독립변수 7을 보고 그에 대응하는 종속변수 값으로 11을 답하였다. BT나 FT에서의 반응과 달리 NT에서는 종속변수 내에서 규칙을 찾는 시선도약은 나타나지 않았고 독립변수와 종속변수를 체계적으로 대응시켜 보는 시선이 나타났으며 그 결과 NT과제를 바르게 해결할 수 있었다. 즉, 학생 5는 FT에서는 학생 8과 BT에서 성공적이었던 재귀적 패턴의 사고를 유지하여 오답을 제시하였지만, NT에서는 재귀적 패턴이 아니라 대응관계를 파악하는 시선의 흐름을 보여주었고 성공적으로 과제를 해결할 수 있었다.

[Figure 10] Gaze Plots of Student 5 who solved FT and NT; FT(at top), NT(at bottom)

학생들의 정답률과 응답시간을 함수표 유형별로 비교한 결과, BT를 제시했을 때 다른 유형보다 통계적으로 높은 정답률과 짧은 응답시간을 나타낸 것으로 보아 학생들이 BT를 쉽고 빠르게 해결할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 변수영역별 TFD의 비교에서 BT는 종속변수 영역을 더 오래 응시하는 경향이 있었다. Carraher et al. (2008)과 Lannin et al. (2006)는 함수적 관계 파악을 시도하는 초기의 학생들이 대부분 재귀적 패턴의 수준에서 사고하는 경향이 있다고 하였다. 본 연구의 참여자들도 대응관계를 아직 학습하지 않았기 때문에 BT를 제시했을 때 재귀적 패턴으로 규칙을 찾기 위해 종속변수에 더 큰 관심을 두는 것은 당연하며 그 결과 효율

적으로 문제를 해결하여 높은 정답률과 빠른 응답 시간을 드러낸 것 역시 당연한 결과라 할 수 있다. 하지만 이를 역으로 보면 재귀적 패턴만으로도 충분히 답을 찾을 수 있는 BT를 해결하는 동안 독립변수 영역에 낮은 관심을 둔 것으로 보아 BT를 제시했을 때 학생들은 독립변수와 종속변수 사이의 관계를 파악해야 할 필요성을 느끼기 어렵기 때문에 다른 유형의 함수적 사고로 나아갈 기회를 제공받을 수 있을지 의문스럽다.

다만 재귀적 패턴의 사고를 하는 아동들임에도 FT와 NT를 볼 때에는 양쪽에 관심을 비슷하게 두었다는 연구 결과는 의미가 있다. 비록 FT와 NT의 정답률은 낮았기에 양쪽을 보는 것이 곧 함수적 사고의 신장과 직결한다고 할 수는 없다. 하지만 응답하기까지 걸린 시간이 BT보다 길었던 것을 보면 학생들이 FT와 NT과제를 해결하기 위해 더 오래 고민하고 생각하는 시간을 가졌음을 알 수 있고, 그 시간동안 BT와는 다른 방식으로 함수표를 관찰하고 탐색하며 사고를 전환할 만한 기회를 제공받았다고 할 수 있다. 문제는 다른 방식으로 사고해야할 필요성을 느낀 뒤 학생들이 어떻게 반응하느냐인데, 이는 학생들의 오답 사례에서 확인할 수 있었다. FT가 제시되었을 때 학생5와 학생8은 고민 끝에 재귀적 패턴의 오류를 제시하였지만, NT가 제시되었을 때 학생 8을 모르겠다고 반응하며 자신의 재귀적 패턴으로는 해결할 수 없음을 인정했고 학생 5는 독립변수와 종속변수를 짝지어 보며 대응관계를 파악하여 문제를 바르게 해결하는 변화가 드러났다. 두 학생의 사례를 보면 NT를 제공했을 때 재귀적 패턴을 넘어서야 할 필요성을 느낄 수 있고 더 나아가 대응관계를 파악할 가능성이 있다고 할 수 있다.

함수표 형태에 따른 학생들의 반응

함수표 형태에 따라 정답률과 응답시간을 대응표본 t-검정으로 비교한 결과를 <Table 7>에 제시하였다. 학생의 수가 9명이므로 t-검정을 위해 정규성 가정을 만족시켜야 하는데, 검정결과 정답률과 응답시간 모두 가정을 만족시켰다(각각, p=0.113, p=0.918). 형태에 따른 정답률을 비교하였을 때, 가로형의 정답률(45.4%)이 세로형(50.9%)보다 낮았으나, 통계적으로 유의미한 차이는 드러나지 않았다(F=2.000, p=0.195). 응답시간의 차이를 비교하였을 때에도 가로형의 응답시간(18.39초)이 세로형(17.90초)보다 길었지만, 통계적으로는 뚜렷한 차이가 없었다(p=0.784). 즉, 함수표의 형태에 따른 함수표의 난이도 차이는 크지 않은 것으로 볼 수 있다.

<Table 8>은 형태에 따라 독립변수 영역과 종속변수 영역의 TFD를 대응표본 t-검정을 통해 비교하여 제시한 것이다. 유형별 TFD를 비교할 때와 마찬가지

<Table 7> Paired t-test results of correct response rate and response time by shape

	Horizontal	Vertical	Normality test (Shapiro-Wilk)		Paired t-test				
			d	p	평균 차	표준 편차	t	d	p
correct response rate (%)	45.4	50.9	9	0.113	-5.5	0.11785	-1.414	8	0.195
response time (sec)	18.39	17.90	9	0.918	0.49	5.21390	0.283	8	0.785

<Table 8> Paired t-test results of TFD within two variable areas by shape

Shape	Mean TFD (초)		Normality test (Shapiro-Wilk)		Paired t-test				
			d	p	평균 차	표준편차	t	d	p
Horizontal	독립	5.95	7	0.293	.48	1.655	.770	6	0.471
	종속	5.47							
Vertical	독립	4.20	7	0.409	-3.63	3.004	-3.203	6	0.019*
	종속	7.83							

로 정규성 검정을 실시하여 가로형, 세로형 모두 정규성 가정을 만족하였다(각각, p=0.293, p=0.409). 가로형의 경우 독립변수영역은 5.95초 동안 응시하였고 종속변수영역은 5.47초 동안 응시하였는데, 통계적으로 뚜렷한 차이는 없었다. 반면, 세로형은 독립변수 영역의 TFD(4.20초)보다 종속변수 영역의 TFD(7.83초)가 유의미하게 길었다(t=-3.203, p=0.019). 즉, 가로형 함수표를 제시했을 때 학생들은 독립변수와 종속변수에 비슷한 관심을 두고 문제를 해결하였으며 세로형 함수표를 제시했을 때는 종속변수에 더 많은 관심을 두고 문제를 해결했다.

[Figure 11] Absolute gaze duration heat map; Horizontal function table(at top), Vertical function table(at bottom)

한편, [Figure 11]에 제시된 절대시간 히트맵의 왼쪽은 가로형 함수표이고 오른쪽은 세로형 함수표이다. 가로형 함수표의 경우 히트맵 상으로도 두 변수 영역에 대한 관심이 유사해 보인 반면, 세로형은 학생들의 관심이 종속변수 영역에 더 많이 집중되어 있음을 시각적으로 확인할 수 있다. 이는 가로형에서는 독립변수 영역과 종속변수 영역의 TFD 사이에 유의한 차이가 없으며, 세로형의 경우 종속변수 영역을 뚜렷하게 오래 응시한다는 <Table 8>의 통계적 결과를 뒷받침한다.

함수표 형태에 따라 독립변수 영역과 종속변수 영역의 TFD를 비교한 결과가 달랐던 이유를 파악하기 위해 학생들의 시선 영상을 자세히 살펴보았다. <Table 9>는 함수표 과제가 제시되었을 때 학생들이 처음 응시하는 곳이 독립변수 영역인지 종속변수 영역인지 확인하여 함수표 형태별로 분류한 결과이다. 가로형 함수표 과제가 제시되었을 때 학생 1, 3, 9는 독립변수를 먼저 본 과제의 수(6개)와 종속변수를 먼저 본 과제의 수(6개)가 똑같았으며, 학생 5, 6, 7은 독립변수를 먼저 본 과제의 수가 종속변수를 먼저 본 과제의 수보다 많았다. 하지만 학생 8은 종속변수를 먼저 본 과제의 수가 독립변수를 먼저 본 과제의 수보다 많아 7명의 학생들 사이에 일관된 경향은 발견되지 않았다. 하지만 세로형 함수표 과제가 제시되었을 때는 정도의 차이는 있지만 모든 학생이 종속변수를 먼저 본 과제의 수가 독립변수를 먼저 본 과제의 수보다 많았다. 비록 적은 수의 사례이기는 하지만, 본 연구에 참여한 학생들은 세로형의 함수표가 제시되었을 때 종속변수를 우선적으로 고려하는 경향이 나타났다.

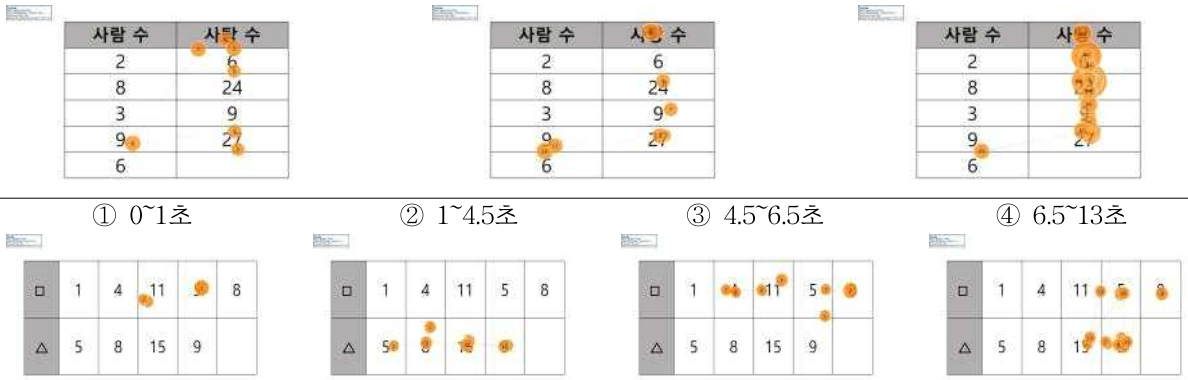
<Table 9> The results of classifying the position of the first fixation point by shape

Student	Horizontal		Vertical	
	독립 변수	종속 변수	독립 변수	종속 변수
학생 1	6 (50%)	6 (50%)	4 (33.3%)	8 (66.7%)
학생 3	6 (50%)	6 (50%)	5 (41.7%)	7 (58.3%)
학생 5	9 (75%)	3 (25%)	5 (41.7%)	7 (58.3%)
학생 6	10 (83.3%)	2 (16.7%)	0 (0%)	12 (100%)
학생 7	9 (75%)	3 (25%)	5 (41.7%)	7 (58.3%)
학생 8	5 (41.7%)	7 (58.3%)	4 (33.3%)	8 (66.7%)
학생 9	6 (50%)	6 (50%)	2 (16.7%)	10 (83.3%)

첫 번째 시선고정점이 찍힌 이후의 시선이 어떠하였는지는 시선사례를 바탕으로 설명하고자 한다. 대응관계에 대한 학습이 이루어지기 전의 학생들이 대부분 재귀적 패턴의 사고를 하는 것을 고려하여 재귀적 패턴의 사고 경향이 짙었던 학생 6의 GP를 시간

<Table 10> Gaze plots of students 6 by shape

Vertical	① 0~2초	② 2~4.5초	③ 4.5~25.5초	
Horizontal	① 0~1초	② 1~4.5초	③ 4.5~6.5초	④ 6.5~13초



순서별로 나누어 <Table 10>에 제시하였다. 세로형 함수표가 제시되었을 때, ① 학생 6은 종속변수 영역에서 탐색을 시작하였다. 종속변수 영역을 위에서 아래로 차례로 훑어본 후 독립변수 영역에서는 '9'만 응시하고 다시 종속변수 영역의 맨 위의 맥락 '사탕 수' 쪽으로 시선이 돌아갔다. '9'에서 '사탕 수'를 향하는 짧은 찰나에 독립변수를 빠르게 훑어보았다고 가정하여도 종속변수 영역에 대한 관심과 비등하다고 여길 수는 없을 것이다. ② 이후 다시 종속변수 영역으로 돌아가 2.5초정도 아래로 훑어보고 독립변수 '9'를 보았다. ③ 시선은 다시 종속변수 영역을 향했고 아주 짧은 순간 '9'를 한 번 본 것을 제외하고는 21초 내내 종속변수 영역을 내내 응시했다. 이를 종합하여 볼 때, 세로형 함수표가 제시되자마자 곧바로 종속변수 영역에 집중하여 규칙을 찾다가 독립변수 영역에도 잠시 관심을 두기는 하지만 곧바로 종속변수 영역으로 시선이 회귀하는 패턴이 반복적으로 드러났으며, 결국 마지막에는 전적으로 종속변수 영역 내에서만 오랫동안 탐색하는 시선이 드러났다.

가로형 함수표가 제시되었을 때 ① 처음에는 독립변수 영역을 잠깐(1초) 본 후, ② 종속변수 영역으로 옮겨 3.5초간 탐색을 하였다. ③ 이내 다시 독립변수 영역을 2초정도 탐색하였고, 규칙을 찾지 못하자 ④ 빈칸 주변에 있는 독립변수와 종속변수를 대응시켜 보기도 하고 대각선으로 보기도 하며 6.5초간 고민하였다. 정답을 찾지는 못했지만 세로형 함수표와는 달리 과제를 해결하기 위해 탐색하는 동안 독립변수 영역에도 종속변수 영역 못지않게 관심을 두고 탐색하고 있었으며 여러 독립변수들을 골고루 응시하였다.

함수표 형태별 분석 결과, 정답률과 응답시간의 차이는 두드러지지 않았지만, 시선을 분석한 결과는 흥미로웠다. 세로형 함수표에서는 독립변수 영역보다 종속변수 영역을 더 오래 응시하였다(<Table 8> 참조). 또한 처음부터 종속변수영역을 응시하기 시작하는 경향이 컸으며(<Table 9> 참조), 시선 사례에서도 종속변수영역에 관심이 집중된 것을 확인할 수 있다(<Table 10> 참조). 반면 가로형 함수표는 두 변수 영역을 비슷한 시간동안 응시하였고(<Table 8> 참조) 학생의 시선 사례에서도 두 변수 영역을 비슷하게 탐색하고 있는 것을 확인할 수 있었다(<Table 10> 참조).

Conclusions

본 연구에서는 함수표를 탐색하는 학생들의 시선을 함수적 사고에 따라, 함수표의 특성에 따라 분석하였으며, 분석 결과에 따른 결론 및 제언은 다음과 같다.

첫째, 학생의 함수적 사고에 따라 함수표를 탐색하는 시선에는 차이가 있다. 재귀적 패턴의 사고를 하는 학생 6은 종속변수에 시선이 집중되는 경향이 있었으며 시선도약 역시 종속변수 내에서 이루어지는 경향이 컸다. Blanton et al. (2011)는 재귀적 패턴은 독립변수에 대해 어떠한 분석도 하지 않으며 종속변수 값의 배열에서 변화를 설명한다고 하였는데, 학생 6의 시선은 재귀적 패턴에 대한 Blanton et al. (2011)의 설명과 일치하는 것으로 보인다. 반

면 대응관계의 사고를 하는 학생 9의 경우에는 독립변수 영역과 종속변수 영역에 비슷하게 관심을 두었으며, 시선도약의 경우 독립변수 영역 내, 종속변수 영역 내, 독립변수와 종속변수 쌍 사이의 시선도약이 골고루 나타났다. 특히 <Table 4>의 학생 9의 GP에서는 독립변수와 종속변수 쌍 사이의 시선도약이 확연히 많았으며 여러 변수 쌍을 골고루 짝지어 보는 것을 확인할 수 있었다. 이러한 학생 9의 시선은 Blanton 외(2015)와 Warren과 Cooper(2006)이 대응관계를 파악하기 위해서는 두 변수 영역을 가로질러 보아야 한다는 주장에 부합한다고 할 수 있다. 따라서 재귀적 사고를 하는 초등학생들을 대응관계를 파악하는 사고로 나아가게 하기 위해서는 우선적으로 학생들이 두 변수 영역을 골고루, 그리고 각 대응쌍을 짝지어 보며 규칙을 파악하도록 해야 한다.

둘째, 함수표의 유형에 따른 학생 반응의 차이를 바탕으로 학습상황에 적절한 유형의 함수표를 선택하여 사용하여야 한다. 학생들의 행동데이터를 분석한 결과에서 다른 함수표보다 BT의 정답률이 높고 응답시간이 짧은 것으로 보아 학생들이 BT를 쉽게 느끼고 있음을 알 수 있다. BT는 함수표를 처음으로 도입할 때 문턱을 낮춰주는 역할을 수행할 수 있을 것으로 보인다. BT를 활용해 함수표가 어떤 것인지, 함수표에 정리된 자료가 무엇인지 등을 확인할 수 있는 기회를 제공하여 새롭게 학습할 내용에 대해 심리적 부담을 줄여주는 것은 권장할 만한 교수 전략이라 할 수 있다. 하지만 대응관계를 지도할 때 BT만을 사용하는 것이 학생들의 함수적 사고의 발달에 도움이 될지는 의문이다. BT를 탐색하는 시선에서 알 수 있었듯이 학생들이 독립변수에 대해 많이 고려하지 않고도 높은 정답률이 나타난 것은 대응관계를 파악해야 할 필요성을 느끼지 못하게 할 우려가 있다. 반면 FT나 NT를 제시했을 때는 두 변수영역을 응시하는 시간이 비슷했다. 이는 재귀적 패턴으로 해결하기 어려운 문제에 직면하자 학생들이 독립변수 영역에 관심을 갖기 시작한 것으로 판단할 수 있다. 다만 학생 5와 학생 8의 사례를 보면, FT의 경우 독립변수를 좀 더 고려하기 시작했음에도 결과적으로는 각각의 변수 영역을 따로 탐색하며 재귀적 패턴을 그대로 유지하며 오답을 제시했지만([Figure 5], [Figure 7] 참조), NT의 경우에 재귀적 패턴의 무용함을 깨달았고([Figure 6] 참조), 더 나아가 두 변수를 짝지어 보며 대응관계를 파악하기까지 했다([Figure 7] 참조). 즉, NT는 재귀적 패턴의 사고를 하는 학생들이 대응관계를 파악하도록 유도할 수 있는 반면, FT는 대응관계를 파악하는 것 자체에 도움이 되는지는 확인하기 어려웠다. 다만 먼 값을 찾는 것이 대응관계를 일반화하는 데에는 도움이 된다는 연구들이 있으므로(Blanton et al., 2015; Stephens et al., 2017), 본 연구의 결과와 선행연구를 종합하여 볼 때 BT는 두 수의 대응관계를 지도하는 초기에 사용하여 함수표를 쉽게 도입하고, NT는 학생들이 재귀적 패턴을 벗어나야 함을 깨닫고 대응관계를 발견하도록 안내할 때 사용하며, FT는 학생들이 대응관계를 파악할 수 있게 된 후에 발전적인 과제로 사용하여 두 변수의 대응관계를 일반화하여 표현하게 할 때 사용하는 것이 학생의 함수적 사고 신장을 위한 교수학습에 도움이 되는 방법일 것이다.

셋째, 함수표의 형태에 따른 학생의 시선의 차이를 고려하여 함수적 사고에 도움이 되는 형태의 함수표를 제시할 필요가 있다. 함수표 형태에 따른 정답률과 응답시간의 차이는 두드러지지 않았지만 시선을 분석한 결과에서는 형태에 따라 차이가 있었는데, 가로형 함수표에서는 두 변수 영역을 비슷하게 응시하였지만 세로형 함수표를 제시했을 때는 독립변수영역보다 종속변수 영역에 더 많은 관심을 두었다. 세로형 함수표에서의 이 같은 시선 반응은 재귀적 패턴이었던 학생 6의 시선 분석 결과와 같으며 BT를 제시했을 때와도 같은 결과이다. 세로형 함수표에서 재귀적 패턴의 사고를 하던 학생이 형태만 가로형으로 바뀌 제시한다고 한 순간에 대응관계를 탐색하게 될 것이라 기대할 수는 없을 것이다. 하지만 세로형 함수표를 제시했을 때 학생들이 종속변수영역에 먼저 관심을 두는 경향이 컸고 이것이 재귀적 패턴의 사고와 연결되면서 그대로 종속변수영역 안에만 시선이 갇혀 반복적으로 종속변수 영역을 탐색하는 사례가 발견되었다. 반면 가로형 함수표를 제시했을 때는 독립변수도 훑어보고, 종속변수도 훑어보며, 비슷하게 고려하고 있었다. Blanton et al. (2011)은 재귀적 패턴이 자료를 이해

하기 위한 첫 번째 단계이지만 함수적 사고를 위해서는 하나 이상의 수열을 관찰하고 양들이 어떻게 서로 관련되어 변하는지 이해해야 한다고 하였으므로, 종속변수에 더 많은 관심을 두는 세로형보다는 두 변수에 관심을 나눠주는 가로형을 제시하는 것이 학생의 함수적 사고를 위해 보다 나은 방향일 것이라 생각된다.

마지막으로 본 연구에 적용한 시선추적은 교육과 관련된 연구 및 실제에 많은 도움을 줄 수 있다. 본 연구에서는 함수표에 대한 학생의 반응을 알아보기 위해 시선추적 연구를 병행하였으며 그 결과 인터뷰만으로는 알기 어려웠을 학생 반응의 차이를 포착할 수 있었다. 그 결과 학생의 시선에 학생의 함수적 사고가 드러난 것으로 보아 시선추적을 통해 학생의 사고과정을 면밀히 살피고 이해할 수 있음을 알 수 있다. 또한 함수표 자극에 따라 학생의 시선에 차이가 나기도 하였는데, 이를 토대로 시선추적 연구가 학생에게 제공될 학습 자료의 형태나 구조에 따른 학생의 관심의 차이를 확인할 수 있게 도와 더 나은 교수·학습 자료 개발에 도움이 될 수 있을 것이다.

References

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A.(2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J.(2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 34-42.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M.(2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502. 방정숙, 최지영, 이지영, 김정원(역) (2017). 대수적 사고의 필수 이해. 서울: ㈜교우.

Bolden, D., Barmby, P., Raine, S., & Gardner, M.(2015). How young children view mathematical representations: a study using eye-tracking technology. *Educational Research, 57*(1), 59-79.

Bojko, A.(2013). *Eye tracking the user experience: A practical guide to research.* Rosenfeld Media.

Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S.(2002). Additive relations and function tables. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309-319.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D.(2007). Early algebra. In Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 687-694). IAP.

Choi, E., Oh, Y.(2016). The Influence of the Functional Thinking Based-Teaching on Algebraic Reasoning and Functional Thinking Level of Sixth Grade Elementary School Students. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 20*(4), 655-676.

Choi, J. Y., Pang, J. S.(2012). An Analysis of Elementary School Students' Understanding of Functional Relationships. *School Mathematics, 14*(3), 275-296.

Ha, S. H., Lee, G. H.(2011). Case Study on the 6th Graders' Understanding of Concepts of Variable. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A: The Mathematical Education, 50*(2), 213-231.

Hoffman, J. E. (1998). Visual attention and eye

movements. *Attention, 31*, 119-153.

Kim, H. M., & Lee, K.(2017). Students' Understanding on Formal Arrangement of Algorithms: Evidence from Eye Movements. *International Information Institute (Tokyo). Information, 20*(9B), 6687-6694.

Kim, H. M.(2018). *Understanding Fractional Multiplication Through Emphasis on Visual Models : Using Eye-tracker*. Unpublished master's thesis. Korea National University of Education, Chungbuk.

Kim, J. W.(2017). How Do Elementary School Students Understand Tables? : From Functional Thinking Perspective. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 20*(1), 53-68.

Kim, J. W., Pang, J. S.(2008). An Analysis of Third Graders' Functional Thinking. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 11*(2), 105-119.

Kim, K. H., Pang, J. S.(2015). An Investigation of the Instructional Implications to Foster Fourth Graders' Functional Thinking. *Journal of the Elementary Education Society, 21*, 1-15.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E.(2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(4), 299-317.

Lee, H., Lim, J.(2015). *SPSS 22 Manual*(p. 236-246). Seoul: JypHyunJae.

Lee, M., Lee, K.(2015). Elementary Students' Formation of Relational Thinking about Equation. *School Mathematics, 17*(3), 391-405.

Martinez, M., Brizuela, B. M.(2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 285-298.

McEldoon, K. L., Cochrane-Braswell, C., & Rittle-Johnson, B.(2010). Effects of Problem Context on Strategy Use within Functional Thinking. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society, 32*(32), 145-149.

McEldoon, K. L., & Rittle-Johnson, B.(2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: The case of function tables. In *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 202).

Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education, Science and Technology Notice 2011-361 [supplement 8].

Ministry of Education(2014). *Elementary Mathematics 4-2*. Seoul: Chunjae Education.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education Notice 2015-74 [supplement 8].

Pang, J. S., Choi, I. Y.(2016). An Analysis of Algebraic Thinking by Third Graders. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 19*(3), 223-247.

Pang, J. S., Lee, Y. J.(2017). Ability of Recognizing and Representing the Relations between Two Quantities by Seven to Nine Years Old Students. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21*(1), 49-72.

Pang, J. S., Sunwoo, J.(2016). An Analysis of Lessons on Geometric Patterns for Developing Functional Thinking of Elementary School Students. *Journal of Educational Research in Mathematics, 26*(4), 769-789.

Smith, E.(2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the

Elementary Curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (p. 143). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A.(2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(3), 143-166.

Tanışlı, D.(2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Warren, E., & Cooper, T.(2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Woo, J. H.(1998). *Educational Basics for the School Mathematics.* Seoul: Seoul national university publisher.