

Development and Application of Visualized Image Materials for Efficient Arithmetic Operation

Hoo-Gi Yang(Graduate Student) · Yong-Tae Kim(Professor)*
Gwangju National University of Education

<ABSTRACT>

In the 1st grade mathematics curriculum in Korea, the number and operation area account for 78%. Many 1st graders, however, have difficulties in counting numbers and understanding word problems because they are vulnerable to the number concept. The reason for this is that the word problem is composed of numbers, words and operations. In this paper, the researchers propose a method to develop the visualized image materials for efficiently guiding such students' sense or arithmetic operations.

Key words : Visualized image materials, Number concept, Arithmetic operation.

Introduction

우리나라의 7~8세 아동 즉, 유치원과 1학년 아동들의 수학의 첫걸음은 수세기와 한 자리 수 덧셈이다. 한자리수 덧셈의 관념은 한 자리 수 뺄셈 뿐 아니라 사칙연산 즉, 덧셈, 뺄셈, 나눗셈, 곱셈과 밀접한 관계가 있으며 나아가 대수학을 위한 첫걸음이 된다. 초등학교 수와 연산 영역 지도에서 중요한 성취 목표로 삼아야 하는 것은 수와 연산의 의미를 심도 있게 이해하는 것이며 학생들로 하여금 풍부하고 다양한 수 감각을 견지하도록 하는 것이다. 수 감각이란 수에 대하여 직관적인 느낌과 수의 다양한 사용과 해석이라고 할 수 있으며, 초등학교 모든 수학 수업의 기초가 된다. 그러나 지금까지의 수와 연산 영역의 지도는 대부분 수의 읽기와 쓰기 그리고 기계적이고 수동적인 지필 알고리즘 중심으로 이루어져왔다.

현재 우리나라 아동들이 한 자릿수 더하기 한 자리 수계산 능력의 편차는 매우 심하다. 물론 수 개념에 대한 선천적인 부분도 무시할 수 없으나 평균적으로 실제 우리나라 저학년들이 가장 어려워하는 것이 연산이라는 것이다(kim, 1999). 이는 저학년 때부터 사칙연산의 원리보다는 반복된 훈련을 통해 식상해하고 두뇌를 단순화시키기 때문에 수학에 대한 흥미나 태도, 자신감이 매우 낮다.

초등학교 수학 교육의 중요한 목표 중 한 가지는 학생들이 실생활에서 접하게 되는 수학적 사고를 기반으로 한 문제를 스스로 해결할 수 있도록 보탬이 되는데 있다. 실생활 속에 접목된 수학적 문제를 풀기 위해서는 수학의 가장 기초가 되는 수 개념과 연산과정을 근본적으로 이해하고 활용할 수 있어야 한다.

따라서 수학 교육에 있어 수와 연산에 대한 개념은 별도의 것으로 분리하여 다룰 성질의 것이라기보다는

* Corresponding Author : Yong Tae Kim, ytkim@gnue.ac.kr

Received November 3, 2018; Reviewed November 20, 2018 Accepted December 3, 2018; Published December 31, 2018

© 2018. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

상호 유기적인 관계를 고려해 다루어야 하며 앞으로의 수학 학습에서 보다 더 중요한 부분은 앞서 이야기한 단순한 알고리즘의 암기나 하나의 정답을 찾는 것이 아니라 문제 안에 내포된 수학 개념의 의미를 면밀히 이해하는 것이며, 학생들로 하여금 풍부하고 다양한 수 감각을 체득하도록 하는 것이다. NCTM(2000)에서는 앞으로의 수학 교육과정의 질적 측면을 평가하는 기준으로 수 감각의 발달을 포함시켜야 한다고 권하고 있으며, 초등학교 수학의 중요한 목표로 수 감각의 발달을 우선적으로 꼽고 있다. 또 Park(1999)에 의하면 1998년에 발표된 일본의 새 수학 교육과정 개정의 쟁점 중 “수량과 도형에 관한 수적 감각을 넓고 풍부하게 한다.”와 “수나 계산의 의미에 대한 심도 있는 이해와 여러 가지 계산 방식에 관하여 사고하는 것을 중요시 한다.”라는 내용이 있음을 알 수 있다. 뿐만 아니라 Kim(1999)이 우리나라의 제 7차 수학과 교육과정 중 ‘수와 연산’ 영역의 개정에 대한 전반적인 내용을 정리한 연구결과를 살펴보면 “제 7차 교육과정에서는 학생들의 수 감각을 발달시키기 위한 교수법을 강조하였다.”와 “암산을 강조하고 있으며 계산기 및 컴퓨터 등의 기기 활용 방안 개발에 힘쓰고 있다.”라는 내용을 찾아볼 수 있다 내, (So, 2000). 이러한 예들은 모두 수학 교육과정에서 수감각의 발달을 무엇보다 강조하고 있다는 것을 반증한다.

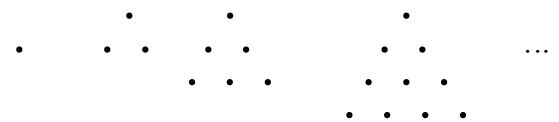
본 연구는 초등 저학년의 창의적이고 효과적인 수업을 위해 수학 교육의 철학에 근거하여 시각화 이미지를 통한 수업의 프로그램을 제시하고 그 효과를 검증해 봄으로써, 수 감각의 발달을 위한 효과적인 지도 방안을 모색해 보고자 한다.

Theoretical Background

Visualized image

시각화 이미지란 어떤 개념을 그림으로 표현한 화면을 눈으로 본 후 생성되는 잔상을 뜻하는 것으로, 현대에서는 컴퓨터 그래픽, 영화, 프레젠테이션 디자인, 통계 데이터 등의 교육용 기법에 활용되고 있다.

수학에서의 시각화 이미지는 수학적 개념을 도형으로 표현한 그림을 통하여 그 개념과 도형의 잔상을 동일한 것으로 기억하는 것으로 볼 수 있다. 수와 연산을 도형과 접목시킨 최초의 수학자는 고대 그리스의 피타고라스학파로 볼 수 있다(Boyer, 1968). 피타고라스학파는 1, 3, 6, 10, 15, ... 등의 수열을 그 수만큼의 점으로 다음[Figure 1]과 같이 표현하고 이러한 점의 모형을 형상수(삼각수)라고 칭하였으며, 추상적인 수를 점으로 시각화시켜 수열을 도형으로 이미지화한 것이다.



[Figure 1] Triangular Number

그 후, 인류 최초의 수학책인 유클리드 원론의 5-9장까지의 수론에서는 모든 수를 막대의 길이로 표현하여 수에 관한 이론을 직관적으로 이해할 수 있도록 하였다. 또한 아랍의 대표적인 수학자인 알콰리즈미는 도형을 이용하여 이차방정식의 근의 공식을 설명하는 소위 ‘기하대수학’을 발전시켰으며 이러한 모두가 추상적인 수학의 내용을 시각화한 이미지로 변환하여 이해하도록 하는 기법이라 하겠다. 초등 학교수학은 범자연수개념에 대한 기초적인 학습으로부터 비롯되며, 자연수와 그 계산은 초등 학교수학의 중점적인 부분을 차지하고 있다. 우리나라 수학과 교육과정 역시 ‘수와 연산’ 영역의 비중이 많은 부분을 차지하고 있는데, 특히 초등학교 1학년의 경우 그 비중이 무려 78%에 이른다고 한다(Lee, 2004). 자연수에 대한 학습과정은 이후 정수, 유리수, 무리수 등의 고차원적인 수 학습으로 연결되면서 심화, 확장된다. 그러므로 초기에 수에 대한 기초적인 개념을 어떤 방식으로 형성하고 발전시켜 도약하는지 앞으로 경험할 학교수학 전반적인 과정과 연관되어 중요한 의미를 내포한다고 할 수 있다. 또한 이는 초기 수 개념 형성에 문제가 생기면 이후 수학 학습과정에도 문제가 발생할 가능성이 매우 높음을 시사한다.

Chun(2007)은 수학학습부진의 요인과 특징으로 수 개념의 부족을 예시로 들고 있다. 그가 제시한 수

학 학습부진아들의 특징은 다음의 여섯 가지이다.

첫째, 수를 암기하는 것은 잘 할 수 있지만 수에 대한 직관적인 이해도가 현저히 떨어진다. 즉, 그들은 수 감각이 매우 약하다. 둘째, 일정한 패턴과 수학적 관계를 지각하는 데 빈번히 실패한다. 셋째, 수를 이해하는데 많은 부분의 에너지를 쏟기 때문에 문제를 해결할 에너지가 남아 있지 않다. 그래서 수학 학습부진아들은 빈번하게 잘못 읽고, 잘못 쓰며, 수를 세는데 어려움을 경험하고 그 일이 지속적이지 못한다. 넷째, 수나 어휘, 문제해결 과정, 혹은 이전에 학습한 자료를 기억하는데 어려움이 있다. 다섯째, 서술형 문제는 수, 언어, 연산이라는 상징적 요소들로 이루어져 있기 때문에 특히 어려우며 수학 학습부진아들은 문제해석과정에서 사고의 방향을 잃곤 한다. 여섯째, 수학 학습부진아들은 계속 반복적으로 같은 문제를 풀거나 오직 한 가지 문제해결방법만을 이용한다.

Chun(2007)이 주장한 내용을 살펴보면, 수학 학습부진아들은 수에 대한 직관적인 이해, 수를 읽고 쓰는 능력, 수 세기 등 기본적인 수 개념 형성에 많은 문제가 있다는 것을 알 수 있다. 하지만 대개의 초등학교 교사들은 수학 학습부진아를 지도하는 과정에서 수의 개념보다는 연산 영역의 반복 학습에 몰두한다. 이러한 학습은 어떤 수학 학습부진아에게는 효과적인 영향을 미쳐 학습 능력의 향상으로 이어지지만, 일부는 그렇지 못하고 고학년이 될수록 부진의 정도는 갈수록 심각해지게 된다. 이것은 부진의 원인에 따라 각기 다른 교수적 처방이 행해져야 한다는 사실과 피상적으로 연산 역량이 부족한 것으로 나타난 아동이라도 실제로는 더 기초적인 능력의 결핍으로 인해 연산 능력에 문제가 초래될 수도 있다는 사실을 의미한다.

지금까지 수 개념 지도와 연관된 선행 연구인 So, (2000), Lee(2010) 등은 주로 수 개념을 향상시키는 방안에 관한 연구로서 꾸준히 있어왔는데 이는 수에 대한 개념이 수학 학습에서 기초, 기본이 되는 중요한 개념임은 누구나 알고 있는 사실에 기인한다. 수 감각은 수에 대한 능숙도나 유연성, 즉 수가 의미하는 바가 무엇이며, 암산을 자연스럽게 수행할 수 있는 능력으로 정의(Kim, 2013)되며, 수 개념과 연산 능력을 짐작할 수 있는 요인이다.

또한 수 감각은 초기 수학 교육에서 무엇보다 강조해야 할 중요한 요소이며, 특히 수학 학습장애 및 학습장애 위험군에 해당하는 학생에게는 이러한 초기 수학 교수가 필수불가결한 요소이다.

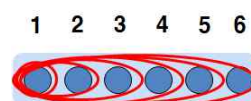
NCTM(2000)의 Principle and Standard for School Mathematics에서는 수 감각 개발을 위해 교수 내용 계획 시 반영해야 하는 내용 요소 및 목표 중 한 가지가 연산의 의미와 연산간의 관계 이해하기로서 그림이나 구체물과 같은 표현들을 직접 만들고 적극적으로 활동함으로써 학생들은 연산 사이의 관계성에 대한 감각을 체득하거나 어떠한 연산을 선택할 것인지 주체적으로 결정할 수 있어야 한다는 것이다. 이를 위해 다양한 문제 상황에서 동일한 연산방법을 적용할 수 있다는 것을 인지하고, 연산들이 서로 어떻게 연관되어 있는지를 알아야 하고, 예측되는 어떤 결과에 대한 아이디어를 사고하도록 돕는다. 이를 위해서는 아이들이 수의 크기와 양적 개념을 직관적으로 아는 것이 중요하다.

피아제는 아동의 수에 대한 개념이나 수학적 개념은 단지 가르침에 의해 습득되는 것이 아니고 자연스럽게 독창적으로 발달된다고 보고 있다. 수 도입 이전에 수량보존개념이 습득되어야 하는데 이는 6~7세쯤 되어야 가능하다. 이때 교사는 관심과 흥미, 욕구를 유발시킬 수 있는 환경을 마련해 주어야 한다. 수 보존개념은 논리적 사고력의 중요한 형태로서 다른 인지 활동을 위해 핵심적인 역할을 한다.

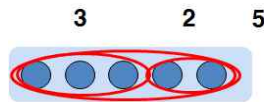
6세에 이르면 수의 보존개념, 수의 불변성 단계에 도달하여 두 집합이 동치(두 집합의 원소의 개수가 같다)임을 발견하게 된다. 어릴수록 1대1 대응 관계보다는 원소를 배열한 길이나 공간에 기반을 둔 수 기초 개념을 습득하게 된다. 이때는 길이나 공간에 대한 지각이 셈수나 세는 것보다 더 중요한 것으로 생각한다. 즉 6세 이후에 수의 보존개념이 형성되어 집합의 배열에 관계없이 다음의 예와 같이 원소의 수가 같으면 동치임을 알게 된다(Kim, 2013).

1. Number Counting Model Based on Set

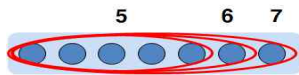
1) Accumulate Model for Counting Number



2) Fundamental Addition Model



2. Number Count Based on Counting Number



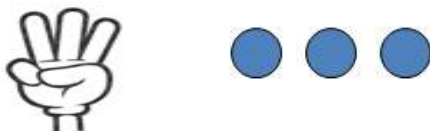
아동들은 오감을 통해서 정보를 받아들이는데 이 중에서 시각효과는 가장 예민하고 두드러진다. 그래서 이를 이용하면 한 자릿수 더하기 한 자릿수를 받아들이는데 있어 재미와 흥미를 이끌 수 있으며 이에 따라 익히는 속도도 빨라진다.

위와 같은 이론적 배경을 바탕으로 수 개념 향상에 매개체로 활용할 구체물을 제시함과 동시에 수를 시각화 이미지화하여 아동들의 풍부한 상상력을 돕고 자연스럽게 셈을 깨우치게 할 수 있도록 하였다.

The Methods of Using Visualized Image

1. Visualize a Number

일반적 상황에서 추상적인 수인 3의 크기와 양을 알도록 지도하기 위해서는 [Figure 2]에서처럼 여러 가지 구체물을 제시하는 것이 일반적이다.



[Figure 2] Various Models for a Number

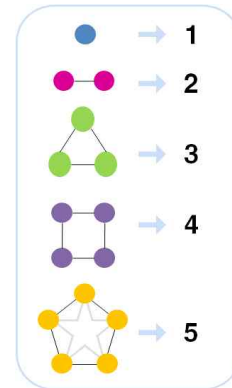
여기에서 우리는 [Figure 3]의 추상적인 수와 구체물 사이에 반구체물 성격의 모양(시각화이미지)을 더하여 아동들에게 시각 효과를 극대화 시키고자 한다.



[Figure 3] Visualized Image between the Model and a Number

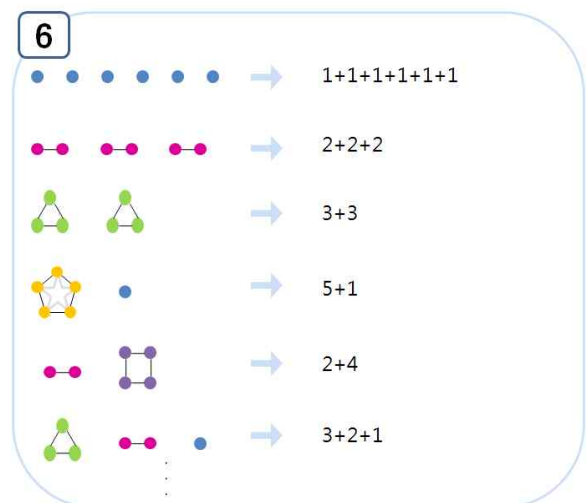
이와 같이 1부터 5까지의 수를 시각화이미지 형식

으로 나타내면 다음 [Figure 4]와 같다.



[Figure 4] 5 Types of Visualized Image

이 5종류의 반구체물(시각화 이미지)로 수 결합을 시도하면 단순하게 입출력되어질 수 개념이 효과적이면서도 다양하고 창의적으로 아이들이 조합하고 분해가 가능하도록 만들 수 있다. 아래 [Figure 5]는 숫자 6을 위의 반구체물인 시각화이미지를 아용하여 여러 가지 방법으로 나타낸 것이다.



[Figure 5] Various Visualized Images for the Number 6

2. Five Kinds of Operations to Visualize

연산에서 가장 기본이 되는 부분은 한 자릿수 덧셈이다. 한 자릿수 덧셈만 자유자재로 해결할 수 있다면 더 큰 수의 덧셈은 물론 뺄셈과 곱셈 나눗셈까지 확장시킬 수 있다. 이에 생각하는 힘을 길러줄 수 있는 밑바탕을 위해 만들어 진 원리가 5종류시각화이

다.

5종류시각화 할 연산종류		
1종	2종	3종
1+1=2	4+1=5	5+1=6
2+2=4	3+2=5	5+2=7
3+3=6		5+3=8
4+4=8		5+4=9
5+5=10		5+5=10
4종		5종
6+6=12		9+1=10
7+7=14		8+2=10
8+8=16		7+3=10
9+9=18		6+4=10
10+10=20		5+5=10

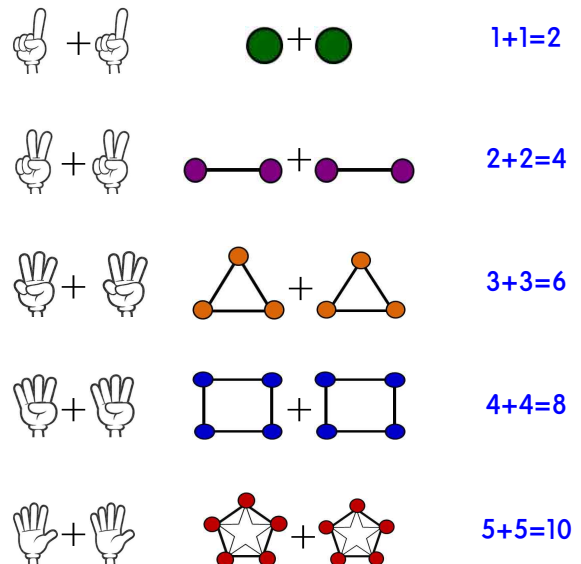
[Figure 6] Five Kinds of Operations to Visualize

먼저 [Figure 6]에서 1종(5개), 2종(2개), 3종(4개)의 시각화 할 연산 11가지로 셈(기본셈)을 익힌 후, 어떤 수를 여러 개의 수의 합으로 만드는 연습을 4종(1종+3종)시각화, 5종(2종+3종)시각화를 통해 상상력을 키울 수 있다.

5종류시각화에서는 한 자릿수 덧셈을 [Figure 6]과 같이 5가지 종류 22개의 연산으로 구분하여 숫자와 구체물, 시각화이미지까지 결합하여 시각화이미지와 수를 동시에 머릿속에 그리면서 다양한 방법으로 수를 분해하고 결합하는 학습을 가능하게 해 준다. 그리고 Bruner(1960)의 교수-학습방법인 EIS 이론에 따라, 눈으로 보고 만질 수 있는 **구체물의 조작과정**과 그 과정을 눈으로 보면서 만들어 지는 **시각화이미지와 추상적인 숫자**를 대응시키는 훈련을 통하여 가급적이면 세 가지가 동시에 진행되도록 지도한다 (Freudenthal, 1983).

1) Visualization of 1st Kinds of Operations

[Figure 7]은 1종의 4가지 연산의 시각화 이미지를 통한 이해의 단계이다.

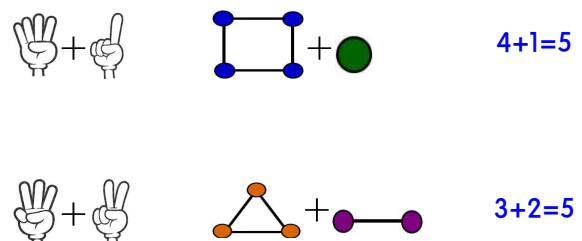


[Figure 7] Visualization of 1st Kinds of Operations

먼저 1부터10까지 순서수를 세면서 똑같은 수의 기본 덧셈인 1+1=2, 2+2=4, 3+3=6, 4+4=8, 5+5=10 등을 먼저 손가락과 같은 구체물과 이미지를 제시한다.

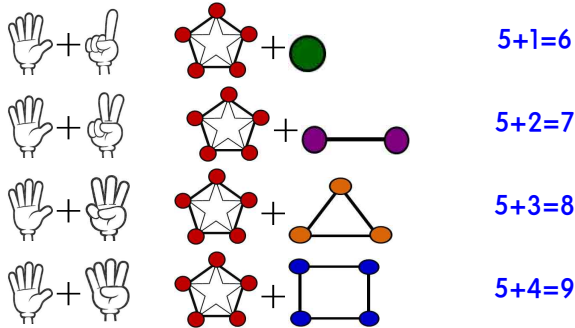
2) Visualization of 2nd Kind of Operation (Making 5)

[Figure 8]은 5가 되는 연산의 방법을 시각화 이미지로 익히는 방법이다.



[Figure 8] Visualization of 2nd Kinds of Operations

3) Visualization of 3rd Kind of Operation (Bigger than 5)



[Figure 9] Visualization of 3rd Kinds of Operations

구체물과 시각화 이미지로 5라는 기준을 정해놓은 후 5에서 1, 2, 3, 4씩 늘어나면 6, 7, 8, 9 가 된다는 것을 익히게 한다.

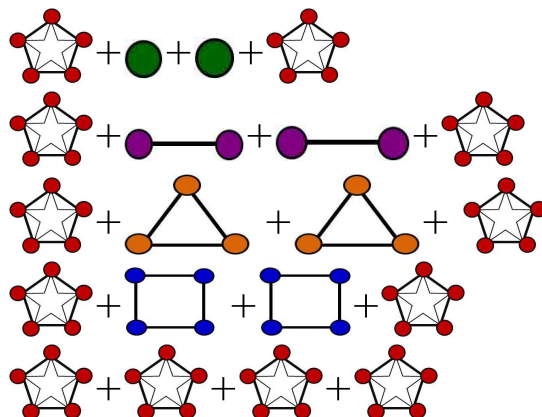
1종, 2종, 3종의 시각화(11종류의 연산)까지가 (한 자릿수)+(한 자릿수)를 하는 기본중의 기본이다. 이후 4종의 시각화(6부터 10까지 동수 합)와 5종의 시각화(10 만들기)는 이 11개 연산을 조립하여 완성하고 이후 다른 형태의 (한 자릿수)+(한 자릿수)까지도 11개 연산으로 조립하며 셈을 익힌다.

4) Visualization of 4th Kind of Operation (Making Numbers Bigger than 5)

4종은 [Figure 10]에서처럼 1종과 3종의 결합으로 만들어진다.

6을 5와 1로 가르는 것은 3종에서 하였으며, 가른

$$\begin{aligned} 6+6 &= 12 & 5+1+1+5 \\ 7+7 &= 14 & 5+2+2+5 \\ 8+8 &= 16 & 5+3+3+5 \\ 9+9 &= 18 & 5+4+4+5 \\ 10+10 &= 20 & 5+5+5+5 \end{aligned}$$

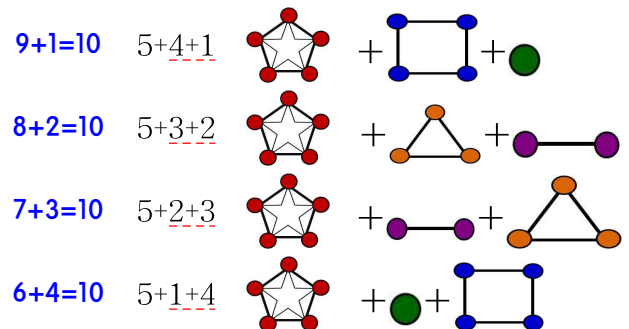


[Figure 10] Visualization of 4th Kinds of Operations

후 1+1을 하는 것과 5+5를 하는 것은 1종에 해당된다. 이와 같게 7을 5와 2로 가르는 것은 3종, 가른 후 2+2와 5+5는 1종에 해당된다. 6+6이나 7+7은 아이들이 어려움을 겪는 셈이지만 이미지를 떠올리면서 전체를 사진 찍듯 기억을 하면 쉽게 해결할 수 있다.

5) Visualization of 5th Kind of Operation (Making 10)

5종은 앞의 2종과 3종의 결합으로 이루어진다.



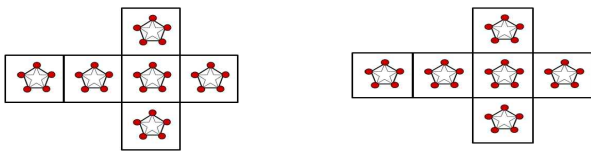
[Figure 11] Visualization of 5th Kinds of Operations

앞서 강조했던 5 두 개가 10이라는 사실은 쉬우면서도 매우 중요하다. 학생들에게 8이라는 수를 제시하면서 ‘얼마를 더하면 10이 될까?’라는 질문은 수에 대한 감각이 있는 아동은 쉬울 수도 있으나 그렇지 않은 학생들은 어려움을 겪게 된다. 8을 3종의 시각화에서 실시한 5와 3의 시각화로 떠올리고, 또 3을 5로 만들기 위해 2종의 시각화를 떠올리면 2를 쉽게 떠올릴 수 있을 것이다.

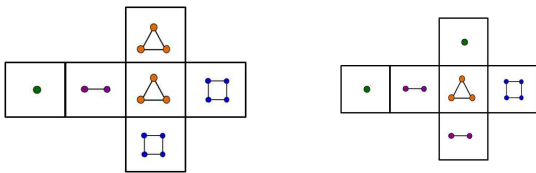
Learning Tools for Visualized Image

1. Dice for Visualization

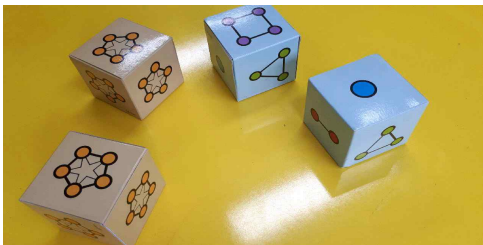
주사위를 시각화의 학습도구로 이용할 수 있다. [Figure 12]는 5를 나타낸 주사위의 전개도이고 [Figure 13]은 1-4를 나타낸 주사위의 전개도이며 [Figure 14]는 이 두 종류의 2종류의 주사위 전개도와 그를 이용하여 만든 주사위를 나타낸 그림이다.



[Figure 12] Dice Net for 5



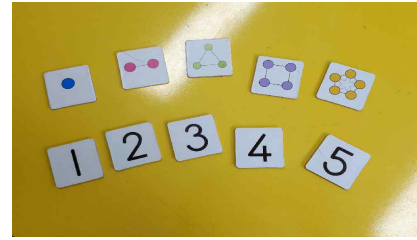
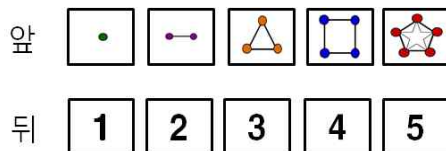
[Figure 13] Dice Net for 1 to 4



[Figure 14] Two Kinds of Dice

2. Cards for Visualization

카드 역시 시각화 자료로 활용할 수 있다. [Figure 15]와 같이 앞면은 그림으로 뒷면은 숫자로 나타내어 시각화 자료로 활용할 수 있다.



[Figure 15] Cards to Visualize

Research and Teaching Methods

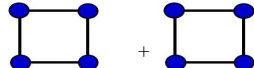
5 Kinds of Visualization

다음은 5가지 종류의 시각화 이미지의 지도 과정과 전략을 소개한다.

1. 1st Visualization: Collecting Same Numbers

1) Teaching Process

1종의 시각화를 지도함에 있어 [Figure 16]의 순서에 따라 학생들이 차례로 익힐 수 있게 한다.

가)	$1+1=2$	
(1종-1)		
나)	$2+2=4$	
(1종-2)		
다)	$3+3=6$	
(1종-3)		
라)	$4+4=8$	
(1종-4)		
마)	$5+5=10$	
(1종-5)		

[Figure 16] Teaching Process of 1st Visualized Images

□ Teaching Strategies of 1st Visualized Images

- 순서 수를 익힌다.(1에서10까지)

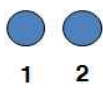
- b.  는 3이고  는 4임을 직관적으로 읽는 연습을 한다.
- c. 덧셈을 읽는다.
- d. 수의 앞 수와 뒤 수를 읽는다.
- e. 같은 수 더하기를 익힌다.
- f. 5 두 개(즉 5+5)는 10이라는 사실을 강조한다.

2) Teaching Methods

가) 1-1 Teaching Methods to Visualize

1종의 시각화 이미지를 지도하는 방법은 <Table 1>과 같다. 이를 활용하여 연산 수업을 실시한다.

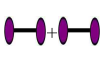
<Table 1> Teaching Process for 1-1 Visualized Images

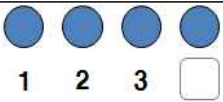
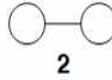
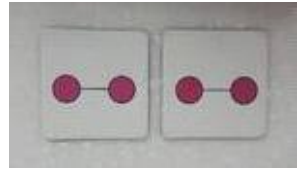
(1-1)	$1+1=2$	 +	Activities
①	 1 2		Count one for ordinal numbers
②	 1	 2	Read it as 'One'
③	 +  =  $1+1=2$		Read it as 'one plus one equals two'
④	Ask questions What is the number one less than two? What is the number one bigger than two?		
The Example of using materials			

나) 1-2 Teaching Methods to Visualize

1-2 시각화 이미지 지도과정은 <Table 2>와 같다.

<Table 2> Teaching Process for 1-2 Visualized Images

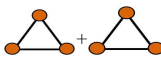
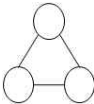
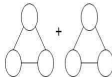
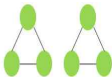
(1-2)	$2+2=4$		Activities
-------	---------	---	------------

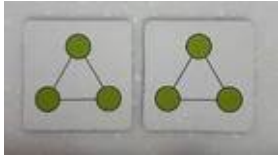
①	 1 2 3	Count ordinal Number as one, two, three
②	 2	Read as Two threefour
③	 +  =  $2+2=4$	Read as two plus two equals four.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 4? What is the one bigger number than 4?	
The Example of using materials		

다) 1-3 Teaching Methods to Visualize

1-3 시각화 이미지 지도과정은 <Table 3>와 같다.

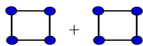
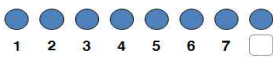
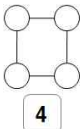
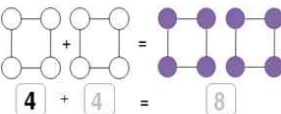
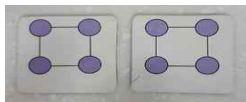
<Table 3> Teaching Process for 1-3 Visualized Images

(1-3)	$3+3=6$		Activities
①	 1 2 3 4 5	Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six.	
②	 3	Read as Three fourfivesix	
③	 +  =  3 + 3 = 6	Read as three plus three equals six.	
④	Ask questions, what is the one smaller number than 6? What is the one bigger number than 6?		

The Example of using materials	
--------------------------------	---

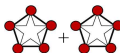
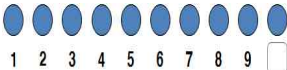
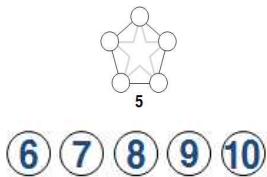
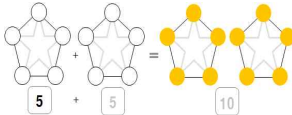
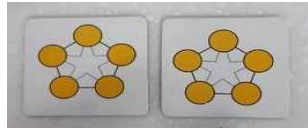
라) 1-4 Teaching Methods to Visualize
1-4 시각화 이미지 지도과정은 <Table 4>와 같다.

<Table 4> Teaching Process for 1-4 Visualized Images

(1-4)	$4+4=8$		Activities
①		Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight.	
②		Read as Four fivesixseveneight	
③		Read as four plus four equals eight.	
④	Ask questions, what is the one smaller number than 8? What is the one bigger number than 8?		
The Example of using materials			

마) 1-5 Teaching Methods to Visualize
1-5시각화 이미지 지도과정은 <Table 5>와 같다.

<Table 5> Teaching Process for 1-5 Visualized Images

(1종-5)	$5+5=10$		Activities
①		Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten.	
②		Read as Five sixseveneightninen n	
③		Read as five plus five equals ten.	
④	Ask questions, what is the one smaller number than 10? What is the one bigger number than 10?		
The Example of using materials			

2. 2nd Visualization: Making 5

1) Teaching Process

□ Teaching Strategies of 2nd Visualized Images

a. 순서수를 익힌다(1에서5까지).

b.  는 3,  는 4임을 직관적으로 읽는 연습을 한다.

c. 덧셈을 읽는다.

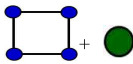
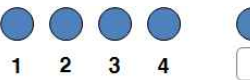
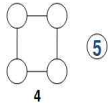
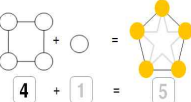
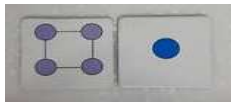
d. 수의 앞, 뒤 수를 익힌다.

e. 5 만들기 는 한 자릿수 더하기에서 두 가지 있다는 것을 강조한다.

2) Teaching Methods

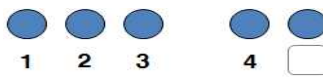
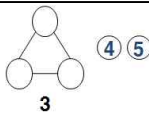
가) 2-1 Teaching Methods to Visualize

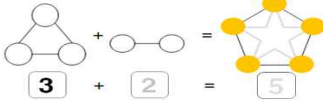
<Table 6> Teaching Process for 2-1 Visualized Images

(2-1)	$4+1=5$		Activities
①		Count one, two, three, four, five for ordinal numbers	
②		Read it as four five	
③		Read it as 'Four plus one equals five'	
④	Ask questions What is the number one less than five? What is the number one bigger than five?		
The Example of using materials			

나) 2-2 Teaching Methods to Visualize

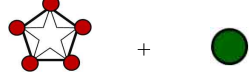
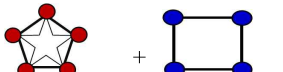
<Table 7> Teaching Process for 2-2 Visualized Images

(2-2)	$3+2=5$		Activities
①		Count ordinal Number as one, two, three, four, five.	
②		Read as Three fourfive.	

③		Read as three plus two equals five.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 5? What is the one bigger number than 5?	
The Example of using materials		

3. 3rd Visualization: Bigger numbers than 5

1) Teaching Process

가).(1종-1)	$5+1=6$	
나).(3종-2)	$5+2=7$	
다).(3종-3)	$5+3=8$	
라).(3종-4)	$5+4=9$	

[Figure 17] Teaching Process of 3rd Visualized Images

□ Teaching Strategies of 3rd Visualized Images

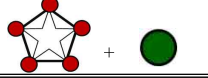
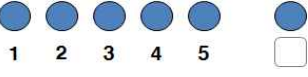
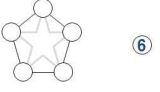
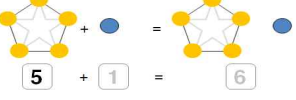
- 5주사위와 1, 4주사위를 던지면서 5를 한꺼번에 읽고 나머지는 순서대로 센다.
- 두 주사위로 더해서 합을 말한다.
- 이 방법은 나중에 5보다 큰 두수를 더하는 데 중요한 역할을 한다.
- 10 만들기에서도 중요한 역할을 한다.

※ 1종, 2종, 3종 시각화 11개 셈까지가 (한 자릿수) + (한 자릿수)의 기본구조이고 이후 이 11개 셈을 조립하여 새로운 셈을 만든다. 이후 4종 시각화(5보다 큰 동수 모으기), 5종 시각화(10만들기)가 11개 기본구조로 조립하는 연습을 해보는 단계이다.

2) Teaching Methods

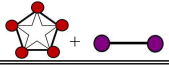
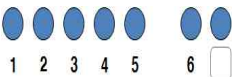
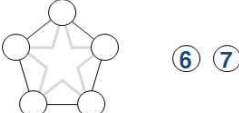
가) 3-1 Teaching Methods to Visualize

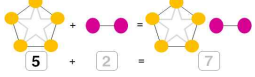
<Table 8> Teaching Process for 3-1 Visualized Images

(3-1)	$5+1=6$		Activities
①			Count one, two, three, four, five, six for ordinal numbers.
②	 5		Read it as Five Six.
③			Read it as 'five plus one equals six.'
④	Ask questions What is the number one less than 5? What is the number one bigger than 5?		
The Example of using materials			

나) 3-2 Teaching Methods to Visualize

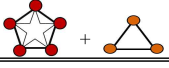
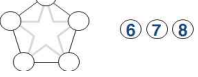
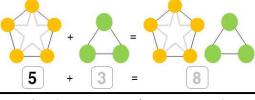
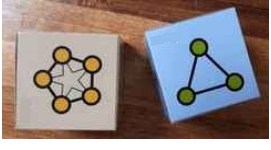
<Table 9> Teaching Process for 3-2 Visualized Images

(3-2)	$5+2=7$		Activities
①			Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven.
②	 5		Read as five sixseven.

③		Read as five plus two equals seven.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 7? What is the one bigger number than 7?	
The Example of using materials		

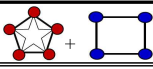
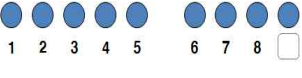
다) 3-3 Teaching Methods to Visualize

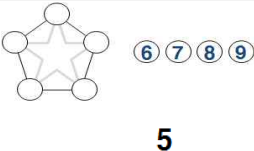
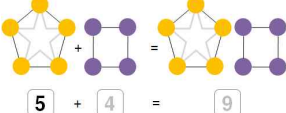
<Table 10> Teaching Process for 3-3 Visualized Images

(3-3)	$5+3=8$		Activities
①			Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight.
②	 5		Read as five sixseveneight.
③			Read as five plus three equals eight.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 8? What is the one bigger number than 8?		
The Example of using materials			

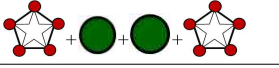
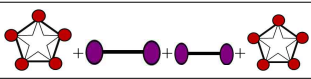
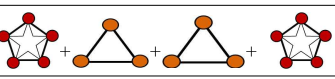
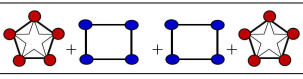
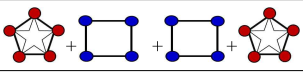
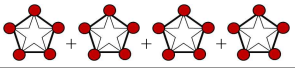
라) 3-4 Teaching Methods to Visualize

<Table 11> Teaching Process for 1-3 Visualized Images

(3-4)	$5+4=9$		Activities
①			Count ordinal Number as one, two,

		three, four, five, six, seven, eight, nine.
②		Read as Five sixseveneight nine.
③		Read as five plus four equals nine.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 9? What is the one bigger number than 9?	
The Example of using material s		

4. 4th Visualization: Collecting Same Numbers bigger than 5

가)(4중-1)	$6+6=12$	
나)(4중-2)	$7+7=14$	
다)(4중-3)	$8+8=16$	
라)(4중-4)	$9+9=18$	
라)(4중-4)	$9+9=18$	
마)(4중-5)	$10+10=20$	

[Figure 18] Teaching Process of 4th Visualized Images

1) Teaching Process

□ Teaching Strategies of 4th Visualized Images

- 5주사위2개와 1, 4 주사위2개를 이용하여 5와

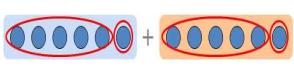
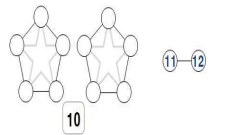
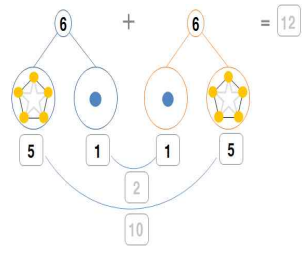
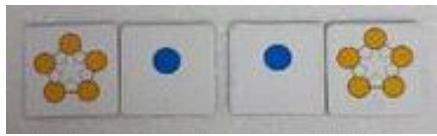
1, 5와 1이 보이게 하면서 어떻게 더하면 좋을
을까? 질문을 한다.

- 6을 6으로 고정시키지 말고 5+1로, 7을 7로
고정시키지 말고 5+2로...보는 연습을 한다.
- $6+6=5+1+1+5$ 로 보면서 5+5는10, 1+1은2 해
서 12라고 말한다.
- 이 4중 시각화는 3중(5+1)과 1중(1+1)을 조립
한 결과임을 강조한다.
- $10+10$ 은 20임을 강조한다.

2) Teaching Methods

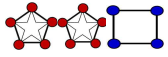
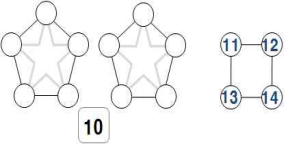
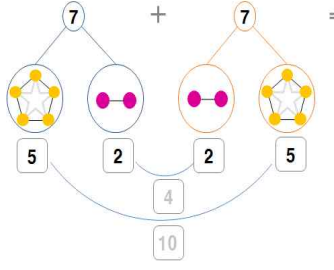
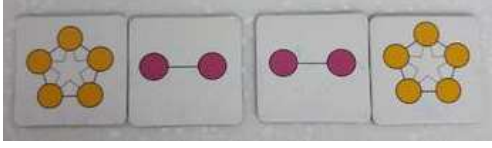
가) 4-1 Teaching Methods to Visualize

<Table 12> Teaching Process for 4-1 Visualized Images

(4중-1)	$6+6=12$		Activities
①			Read six as fiveone, six as fiveone.
②			Read as Ten eleventwelve.
③			6 is divided into 5 and 1 and the same numbers are gathered to make 12. Read as six plus six equals twelve.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 12? What is the one bigger number than 12?		
The Examp le of using materi als			

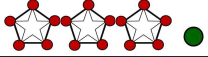
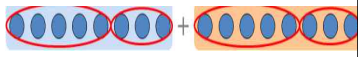
나) 4-2 Teaching Methods to Visualize

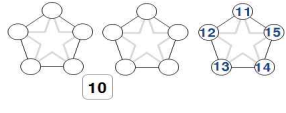
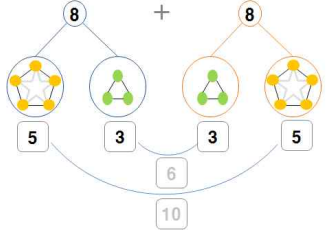
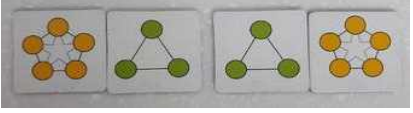
<Table 13> Teaching Process for 4-2 Visualized Images

(4-2)	$7+7=14$		Activities
①			Read seven as fivetwo, seven as fivetwo.
②			Read as ten, eleven, twelve, thirteen, fourteen.
③			7 is divided into 5 and 2 and the same numbers are gathered to make 14. Read as seven plus seven equals fourteen.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 14? What is the one bigger number than 14?		
The Example of using materials			

다) 4-3 Teaching Methods to Visualize

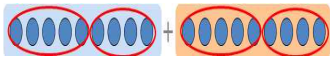
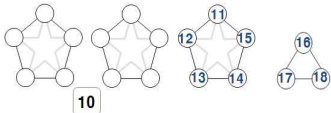
<Table 14> Teaching Process for 4-3 Visualized Images

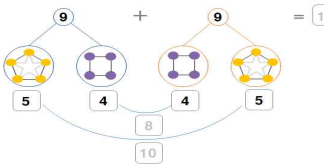
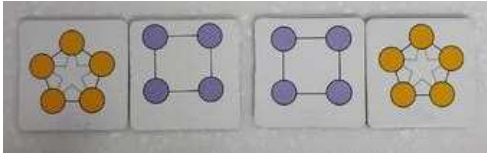
(4중-3)	$8+8=16$		Activities
①			Read eight as fivethree, eight as fivethree.

②		Read as ten, eleven, twelve, thirteen, fourteen, fifteen, sixteen.
③		8 is divided into 5 and 3 and the same numbers are gathered to make 16. Read as eight plus eight equals sixteen.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 16? What is the one bigger number than 16?	
The Example of using materials		

라) 4-4 Teaching Methods to Visualize

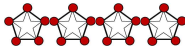
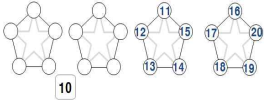
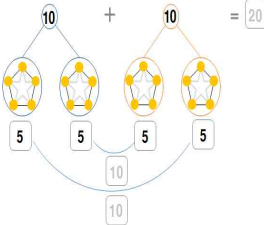
<Table 15> Teaching Process for 4-4 Visualized Images

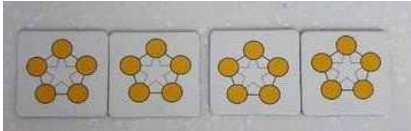
(4중-4)	9+9=18		Activities
①		Read nine as fivefour, nine as fivefour.	
②		ten , eleven, twelve, thirteen, fourteen, fifteen, sixteen, seventeen,	

③		eighteen. 9 is divided into 5 and 4 and the same numbers are gathered to make 18. Read as nine plus nine equals eighteen.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 18? What is the one bigger number than 18?	
The Example of using materials		

마) 4-5 Teaching Methods to Visualize

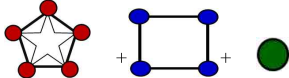
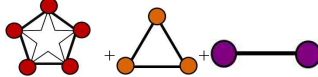
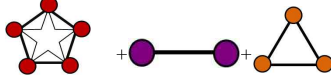
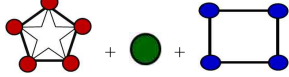
<Table 16> Teaching Process for 4-5 Visualized Images

(4종-5)	$10+10=20$		Activities
①			Read ten as fivefive, ten as fivefive.
②			ten, eleven, twelve, thirteen, fourteen, fifteen, sixteen, seventeen, eighteen, nineteen, twenty.
③			10 is divided into 5 and 5 and the same numbers are gathered to make 20. Read as ten plus ten equals twenty.

④	Ask questions, what is the one smaller number than 20? What is the one bigger number than 20?
The Example of using materials	

5. 5th Visualization: Making 10

1) Teaching Process

가). (5종-1)	$9+1=10$	
나). (5종-2)	$8+2=10$	
다). (5종-3)	$7+3=10$	
라). (5종-4)	$6+4=10$	

[Figure 19] Teaching Process of 5th Visualized Images

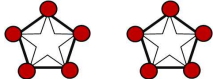
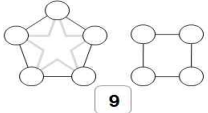
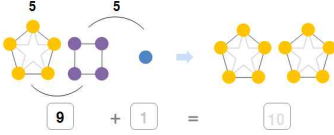
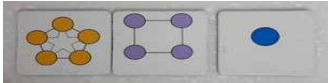
□ Teaching Strategies of 5th Visualized Images

- 10은 5가 두개라고 강조한다.
- 5주사위 한 개와 1,4주사위 한 개를 던진 다음 5가 두 개가 되려면? 의 질문을 한다.
- 이 5종 시각화는 3종과 2종을 조립한 결과임을 강조한다.

2) Teaching Methods

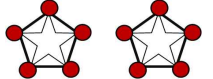
가) 5-1 Teaching Methods to Visualize

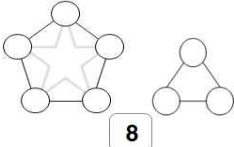
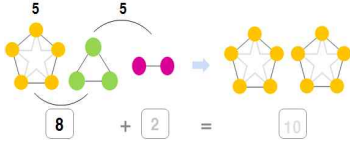
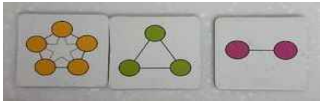
<Table 17> Teaching Process for 5-1 Visualized Images

(5-1)	$9+1=10$		Activities
①			Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten.
②			Read as Nine , ten.
③			9 is divided into 5 and 4, then 10 is filled with the missing number 1, emphasizing two of the five. Read as nine plus one equals ten.
④	Ask questions, what is the one smaller number than 10? What is the one bigger number than 10?		
The Example of using materials			

나) 5-2 Teaching Methods to Visualize

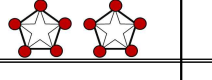
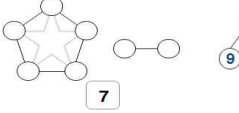
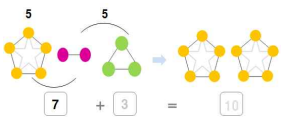
<Table 18> Teaching Process for 5-2 Visualized Images

(5-2)	$8+2=10$		Activities
①			Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten.

②		Read as Eight , nineteen.
③		8 is divided into 5 and 3, then 10 is filled with the missing number 2, emphasizing two of the five. Read as eight plus two equals ten.
④	Ask questions, what is the two smaller number than 10? What is the two bigger number than 10?	
The Example of using materials		

다) 5-3 Teaching Methods to Visualize

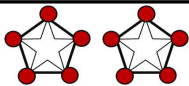
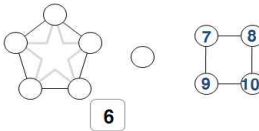
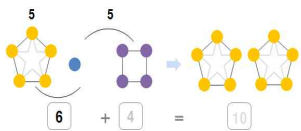
<Table 19> Teaching Process for 5-3 Visualized Images

(5중-3)	$7+3=10$		Activities
①			Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten.
②			Read as Seven , eightnineten.
③			7 is divided into 5 and 2, then 10 is filled with the missing number 3, emphasizing two of the five. Read as seven

		plus three equals ten.
④	Ask questions, what is the three smaller number than 10? What is the three bigger number than 10?	
The Example of using materials		

라) 5-4 Teaching Methods to Visualize

<Table 20> Teaching Process for 5-4 Visualized Images

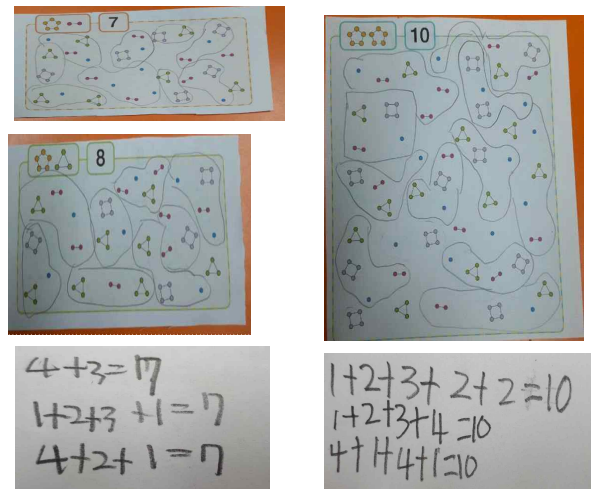
(5종 -4)	$6+4=$ 10		Activities
①			Count ordinal Number as one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten.
②			Read as Six , seveneightnineten.
③			6 is divided into 5 and 1, then 10 is filled with the missing number 4, emphasizing two of the five. Read as six plus four equals ten.
④	Ask questions, what is the four smaller number than 10? What is the four bigger number than 10?		
The Exam ple of using mater ials			

Results

로마자 (Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ...)와 한자(一,二,三...)에 비하면 인도아라비아숫자(1,2,3,...)는 추상적인 특성이 강하다. 본 연구는 인도아라비아수를 시각화이미지화 하였다. 이 결과로 아동들의 풍부한 상상력을 통해 수를 고정시키지 않고 여러 형태로 보는 방법을 아래와 같은 시각화이미지를 활용한 학습법을 가, 나, 다, 라, 마와 같이 이끌어 낼 수 있었다.

Teaching Methods Using Visualized Images

1. Combine the numbers using Visualized Images



[Figure 20] Finding 7, 8, 10

[Figure 20]에서처럼 자유롭게 수들을 찾아보고 식으로 옮기게 하여 분해 조립을 주어진 조건에 맞게 다양한 형태로 표현한다.

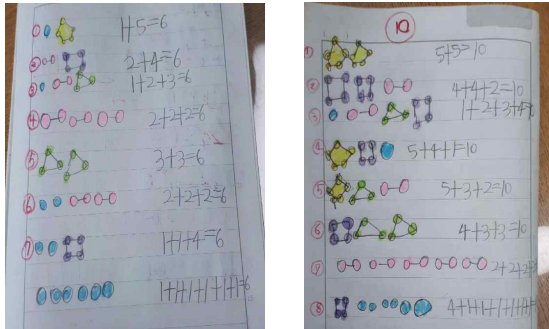
□ Learning Process

- ① 이미지가 임의로 인쇄된 학습지를 나누어 준다.
- ② 수를 정해주고 그 수에 따라 이미지를 찾아 결합하도록 유도한다.
- ③ 다양한 결합 결과에 따라서 수식을 적게 한다.
ex) $4+3=7$, $1+2+3+1=7$, $4+2+1=7$...

$$3+2+1+2=8, 4+3+1=8, 2+1+3+2=8 \dots$$

$$1+2+3+2+2=10, 1+2+3+4=10, 4+1+4+1=10 \dots$$

2. Representing Numbers Using Visualized Images

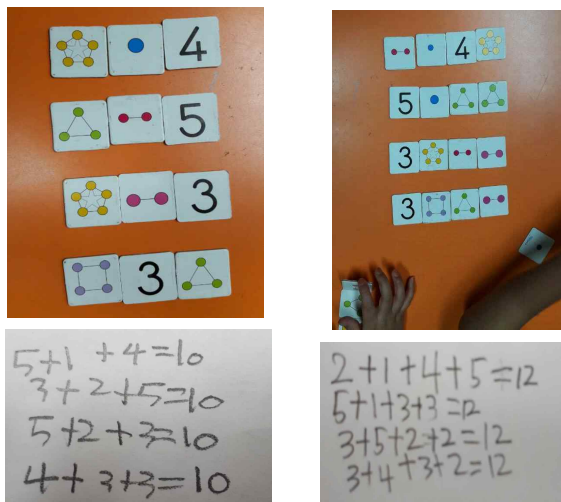


[Figure 21] Making various visualized images for 6, 10

□ Learning Process

- ① 특정 수를 정하여 준다(6 또는 10).
- ② 수에 해당하는 다양한 형태의 이미지를 그리게 한다.
- ③ 시각화 이미지를 수식으로 표현한다.

3. Making Numbers Using Visualized Image Cards



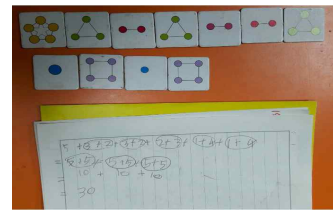
[Figure 22] Making 10 and 12 using cards 3 or 4 including a number card

□ Learning Process

- ① 특정 수(10만들기, 12만들기)를 정하여 주고 규칙을 설명한다.
- ② 수 카드 1개를 포함하여 다양한 형태로 카드를 결합(10만들기는 카드3개, 12만들기는 카드4개)하여 미션을 시행한다.
- ③ 미션을 완수하여 늘어놓은 카드를 수식으로 표현하도록 한다.

4. Addition Using Visualized Image Cards

수를 이해하는 유연성과 대체능력이 향상된다. 시각화카드를 한 움큼 주면서 전부 얼마일까? 하는 문제이다. 처음에는 순서로 더하다가 점점 5단위로 묶어서 세는 유연성을 발견할 수 있다.

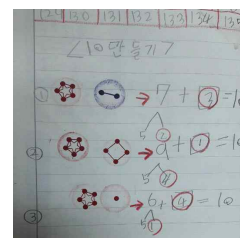


[Figure 23] Count number cards

□ Learning Process

- ① 바구니에 수 카드를 임의로 담아두고 최대한 많은 카드를 가지고 오도록 유도한다.
- ② 카드를 늘어놓아 어떤 카드가 있는지 확인해보도록 하고 더해보도록 한다.
- ③ 아이가 만일 순서대로 더하고자 한다면 처음에는 그대로 더하도록 둔다.
- ④ 이후 5만들기를 활용하여 수를 더하도록 유도한다.
- ⑤ 수식으로 표현한다.

5. Making 10 Using Image Stamp



[Figure 24] Making 10

□ Learning Process

- ① 공책에 5를 먼저 찍어두고 1부터 4까지
임의의 5옆에 적도록 한다.
- ② 10은 5를 두개 만들기에 필요한 수를 구하여
수식으로 적는다.

The Effect of Using Visualized Image

- 시각화된 이미지로 익히기 때문에 습득속도가 매우 빠르다.
- 수를 시각화이미지로 결합하기[Figure 21]은 주어진 수의 양을 여러 이미지로 결합하면서 수와 그 크기를 자연스럽게 익히면서 수식의 다양한 형태를 표현하면서 집중하고 재미있어한다.
- 수를 분해하고 조립하는 능력이 뛰어나게 된다.
- [Figure 23]의 여러 수 표현, $2+1+4+5=12$ 를 $3+9=12$, $7+5=12$, $8+4=12$ 로 재생산 하며 자신들의 다양한 표현을 즐긴다.
- 손가락셈(구체물)에서 자연스럽게 숫자만으로 연산을 한다.
- 수와 시각화이미지가 순간 결합되어 수의 크기가 자연스럽게 머릿속에서 떠오른다.
- 아이들이 배경지식을 이용하여 생각을 스스로 끌어 내어 표현력이 높아진다.
- [Figure 24]에서는 처음에는 카드 전체를 하나씩 무작위로 더하다가 점점 $4+1=5$, $3+2=5$ 를 활용하여 5씩 묶어서 셈을 하기 시작 한다.
- 다양한 생각을 즐기는 아이로 변한다.
- 예) $7+6=13$ 이 되는 과정
4종에서 $6+6=12$ 보다 1이 크기 때문에 13이 된다.
 $7+7=14$ 보다 1이 작기 때문에 13이 된다.
5종에서 7하면 3이 떠오르기 때문에 $7+3+3=13$ 이 된다.
3종에서 $7+6=5+2+1+5=13$ 이 된다.
- 이렇게 간단한 한 자리수 덧셈에서 다양한 생각을 이끌어 낼 수 있는 아이는 더 복잡한 문제를 해결할 때 무한한 사고를 확장할 수 있게 된다.

Conclusion & Suggestions

Conclusion

시각화 이미지를 도입한 수와 연산 지도 결과를 정리하면 다음과 같다.

가. 5종류 시각화에서 1종($1+1$, $2+2$, $3+3$, $4+4$, $5+5$)은 동수 가르기, 동수 모으기를 익히는 과정이다. 이러한 과정을 이용하여 구구단, 곱셈, 나눗셈을 지도할 수 있다.

예를 들어, 3×2 는 3을 두 번 더한 것($3+3=6$),
 3×4 는 3×2 를 두 번 더한 것($3+3+3+3=6+6=12$),
 3×8 는 3×4 를 두 번 더한 것이며 이러한 과정을 통하여 $3 \times 8=3+3+3+3+3+3+3+3=6+6+6+6=12+12=24$ 를 이해하도록 지도할 수 있다. 또한 $3 \times 5=?$ 는 $3 \times 10=30$ 의 반인 15를 즉각 떠올릴 수 있다.

나. 2종 시각화에서 $4+1=5$, $3+2=5$ 의 시각화를 통하여 수를 가르고 모으는 방법을 쉽게 이해할 수 있다.

다. 3종 시각화에서 $5+1$, $5+2$, $5+3$, $5+4$ 개념이 숙달되면, 곱셈 구구에서 3×6 은 3×5 (3×10 의 반)에 3×1 을 더하는 것이므로 $3 \times 6=3 \times (5+1)$, 3×7 은 3×5 (3×10 의 반)에 3×2 을 더하는 것이므로 $3 \times 7=3 \times (5+2)$ 으로 생각하도록 유도할 수 있다.

라. 4종 시각화는 5보다 큰 수를 2배하는 것 즉, $6+6$, $7+7$, $8+8$, $9+9$, $10+10$ 의 계산을 돕는 방법으로서 1종과 3종을 결합하여 계산하는 방법이다. 예를 들어, $6+6$ 은 6을 6으로 고정시키지 않고 $3+3=6$, $5+1=6$ 으로 생각하도록 하여 4종의 시각화를 지도할 때, 다양한 방법으로 덧셈을 할 수 있는 힘이 길러진다. 또한 $6+6$ 계산과정은 향후 $6 \times 2=12$, $12 \div 2=6$, $12 \div 6=2$ 등의 곱셈, 나눗셈과 연계된다. 즉, $6+6=3+3+3+3$ 의 개념으로 볼 때, $3 \times 4=12$, $12 \div 4=3$, $12 \div 3=4$ 까지도 생각을 키울 수 있다.

마. 5종 시각화에서 $9+1$, $8+2$, $7+3$, $6+4$ 는 $5+5$ 와 같다 즉, 5 두 개의 덧셈과 같다는 사실로부터 $10=9+1=5+4+1$, $10=8+2=5+3+2$ 이 되는 사실을 아동이 알게 됨으로서 아동으로 하여금 다양한 방법으로 수를 가르고 모으는 능력을 신장이 됨과 동시에, 이후 두 자리 덧셈이나 세 자리 덧셈도 매우 쉽고 흥미

롭게 계산할 수 있도록 도울 수 있다.

Suggestions

시각화 이미지를 활용한 수와 연산 지도에 대한 몇 가지 연구를 위한 제언을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 5 종류의 시각화연산을 두 자리 수의 덧셈으로 확장하여 지도한 후 연산 능력을 살펴볼 필요가 있다.

둘째, 5 종류의 시각화연산을 근거로 수의 크기를 확장시켜 이를 서로 조립하여 덧셈뿐만 아니라 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 연산을 만들어 보고 이를 해결 하는 학습을 통해 시각화 이미지를 통한 4칙 연산의 효과를 살펴보는 것도 의미 있는 연구가 될 것이다.

Reference

- Kim, Y.(2013). *The Introduction to the History of World Mathematics Education*. Seoul: Kyowoosa.
- Kim, E.(1999), On the teaching methods of number and Operation Area. *Proceedings of the 23th Conference of the Mathematics Education*, 23(1). 327-335.
- Park, Y.(1999), The direction of contents and new mathematics curriculum of Japanese elementary school, *Proceedings of the 23th Conference of the Mathematics Education*, 23(1). 124-138.
- So, Y.(2000), *On the Efficient Teaching Methods for Development of Number Sense*. Unpublished master's thesis, Seoul National University of Education.
- Lee, S.(2010). *A Study on the Development of Number Sense Education Program : the case of third graders*. Unpublished master's thesis, Gyeongin National University of Education, Incheon.
- Chun, Y.(2007), Understanding the concept of learning obstacle and low mathematics achievement, *Mathematics Education*, 32(1), 269-289.
- Boyer, B.(1968). *A History of Mathematics*. NewYork: John Wiley & Sons Inc.
- NCTM(2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Bruner, J. S.(1960). *The Process of Education*. NewYork: Harvard University Press.
- Freudenthal, H.(1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing.