

A Study of the Project-Based Learning Methods for Reinventing Ideas of Mathematician via the Strategy of Polya's Problem Solving

Gahyeon Lim • Yongtae Kim *

Mokpo Affiliated Elementary School of GwangJu National University of Education,
GwangJu National University of Education

<ABSTRACT>

Project-based learning emphasizes learning activities that are long-term, interdisciplinary and student-centered. Students often must organize their own work and manage their own time in a project-based class. Most children, however, have epistemological obstacle which is typical of the prescientific thinking. The researchers propose a teaching-learning method to invoke interests and to overcome epistemological obstacle using the method to reinvent ideas of mathematician via the strategy of Polya's problem solving. To this purpose, we choose 6-th grade children in J Province and implement 5 lessons in that class to propose some efficient methods for overcoming children's epistemological obstacle and developing ability of the reinvention of Mathematician's ideas in the elementary school.

Key words : Project-Based Learning, Polya, Problem Solving, Problem Solving Strategies, Reinventing Mathematician's ideas

Introduction

학교수학에서 학생들이 꼭 배워야 하며 교사가 반드시 가르쳐야 하는 것을 브루너(Bruner, 1960)는 교과라고 하였으며, 그 교과란 지식의 구조라고 하였다. 또한 그는 지식의 구조란 어떤 현상을 이해하는 데에 필요한 안목이며, 이 안목은 결국 학문의 이면에 숨어있는 기본 아이디어와 동의어이고, 학문을 탐구하는 과정은 관련된 현상을 이해하는 데에

이 기본적 아이디어를 활용하는 과정을 의미한다고 하였다. 같은 맥락으로, 학교수학에서 수학자가 수학 개념을 발명할 당시에 사용했던 아이디어를 학생 스스로 재발명하도록 교사가 도와주어야 한다는 안내된 재발명 교수-학습 방법을 Freudenthal(1983)은 제안하였다. 이러한 주장은 이보다 훨씬 이전에 프랑스 수학자인 Clairaut가 첫 발명가들에게는 불가피했던 시험적인 모든 오류를 피할 것만을 주의하면서 그들의 방법과 동일하다고 가정될 만큼 자

* Corresponding Author : Yongtae Kim, ytkim@gnue.ac.kr

언스러운 방법으로 기하의 원리를 개발하려는 의도로 집필된 Clairaut의 기하학 원론(Jang, 2005)에서도 찾을 수 있다. 이러한 교과에 대한 관념은 그 후, 역사발생적 원리에 따른 수학교육에 그대로 반영이 되어 현재의 수학교육 이론에 중요한 영향을 미치고 있다.

그런데 여기에서 일컫는 발명가란 수학자 또는 수학개념을 형성시킨 국가, 민족 등의 집단이며 그들이 수학개념을 발명할 때 야기되었던 다양한 시행착오가 있었다. 그 시행착오의 원인 중 가장 중요한 요인은 수학개념 자체에 내재하는 어려움 때문이기도 하다. 그러한 장애를 현대에서는 인식론적 장애의 외적 요인이라고 부르고 있다. 현재까지 제안된 다양한 수학 교수-학습이론에 따른 교실수업에서 아동들이 수학적 개념 또는 문제에 당면하여 그 과제를 의미충실하게 인식하거나 해결하려고 할 때 최초의 발명가들이 겪어야했던 장애를 자주 경험하게 된다고 한다. 그러한 인식론적 장애를 수학 수업에서 발견하고 수학을 배우고 가르치는 상황의 문제점으로 도입한 사람은 프랑스의 수학교육자인 브루소(Brousseau, 1997)이다.

브루소는 교수 체계에서 나타나는 장애는 학습 개념에서 나오는 결과이며 인식론적 장애의 관념은 교수의 오류, 주체의 불충분함, 지식의 내재적인 어려움 등에서 기인하기 때문에 아동들은 개체 발생적 기원을 가진 장애, 교수학적 기원을 가진 장애, 인식론적 기원을 가진 장애를 겪는다고 하였다. 즉, 아동들이 수학학습에서 겪는 장애는 아동의 내적인 장애와 외적인 장애가 있다는 것이다. 이러한 아동들이 겪는 장애를 극복하도록 하기 위해서 수업시간에 수학의 개념이나 수학문제를 해결할 때에는, 그 것과 유사한 개념을 발명했거나 문제를 해결했던 수학자의 아이디어를 따라서 아동 스스로가 문제 해결 방법을 발견할 수 있도록 도와주는 일이 중요하다. 또한 수학학습 부진을 최소화하는 방법 중의 하나는 아동들이 범하는 오류를 사후에 처치하는 것보다 그 오류의 발생 원인을 교사가 사전에 예측하여 예방하는 일이며(Kim et al., 2017), 그러한 예측은 발명가가 경험했던 인식론적 장애에서 도출할 수 있을 것으로 보인다.

본 논문에서는 학교수학에서 수학 개념 또는 수

학 문제해결의 효율적인 지도를 위하여 발생 가능한 인식론적 장애를 예방하면서 수학자가 사용했던 아이디어를 아동들이 재발명(Freudenthal, 1983)해 보도록 안내하는 방안을 폴리아의 문제해결 4단계(Polya, 1957)와 구성주의적 방식이며 아동 활동중심의 지도방법인 프로젝트기반 학습(Greeno, 2006)을 통하여 학교 현장에 적용하는 방안을 모색하고, 그 방안을 학교 수업에 적용한 사례를 소개한다.

Theoretical Background

이 장에서는 학교수학에서 무엇을, 어떻게 가르쳐야 하는가에 필요한 이론적 배경이며, 본 논문의 전개과정의 핵심이 되는 수학의 역사발생, 프로젝트 학습법, 인식론적 장애와 폴리아의 문제해결 전략을 간략하게 소개한다.

Mathematics Education and Historico-Genetic principle of Mathematics

수업시간에 교사가 가르치고 아동들이 배워야 할 교과란 수학개념의 발명당시에 발명가가 사용했던 아이디어라고 하였으며, 그 아이디어는 수학사 또는 수학의 역사발생에서 찾을 수 있다고 하였다. 따라서 학교수학의 목적은 그 아이디어를 학생으로 하여금 경험할 수 있도록 도와주는 과정으로 전개되어야 할 것이다(Bruner, 1960). 이러한 주장은 사실 Bruner이전의 수학자들에 의해서 강조되어 왔다.

예를 들면, 18세기의 프랑스의 수학자 Clairaut는 그의 저서 ‘기하학 원론(Jang, 2005)’의 서문에서 ‘첫 발명가들에게는 불가피했던 시험적인 모든 오류를 피할 것만을 주의하면서 그들의 방법과 동일하다고 가정될 만큼 충분히 자연스러운 방법으로 기하에 대한 원리를 개발하려고 하였다.’ 즉, 초보자들은 발명가들의 발명경로를 따르면서 매 걸음마다 발명가를 결심시키는 이유를 알아차리게 되며, 그때 발명의 정신을 쉽게 획득할 수 있다는 것이다.

또한 Hilbert의 문하생인 Toeplitz는 그의 저서 ‘미적분학-발생적 접근’(Toeplitz, 1963)에서 “오늘날

우리가 미적분학에서 필수요목으로 가르치고 있는 기본적인 내용에 관하여 ‘왜 그렇게 하는가?’ 또는 ‘어떻게 하여 그렇게 하게 되었는가?’와 같은 질문을 하지 않는다. 그러나 이 모든 것은 한 때 절실한 탐구의 목표였으며, 창조되던 당시에는 솟구치는 의문에 대한 해답이었음에 틀림없다. 만일 우리가 이들 아이디어의 근원으로 되돌아간다면 틀에 박힌 무미건조한 사실들의 활기 없는 그러한 외모가 없어지고, 대신에 싱싱하고 힘찬 생명이 되살아날 것이다.”라고 하였다. 또한 그는 수학교사 교육에서 중요한 것은 역사적 사실의 전달이 아니라 수학과 수학적 방법의 특성에 대한 바른 파악, 곧 태도의 전달이라고 보았으며 수학의 역사적 발달의 논리를 교수학적으로 번역할 수 있기를 바랐다(Woo, 1998). 수학의 역사는 수학내용이 나타난 연대순으로 정리한 것이고, 수학의 역사적 발달을 위계적으로 재정립하여 학습의 내용과 학습활동의 조직에 이용하는 것을 역사 발생적 원리라고 한다. 이러한 역사 발생적 원리를 수학의 교수법에 적용한 사람이 Toeplitz이며 그의 원리는 ‘개인의 정신적 발달을 인도해 주는 가장 좋은 방법은 그 스스로 수많은 시행착오를 제외한 그 정신적 발달의 큰 흐름을 추적해 보는 것이다’라는 논리에 근거하고 있다(Memorandum, 1962). 즉, 역사 발생적 원리에 기반한 수학교육은 수학은 완성된 생산품으로서가 아니라 역사적 발생과정 곧, ‘수학화’ 과정을 되밟게 함으로써 바르게 이해되고 적용될 수 있으며, 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사 자체를 따른다는 것으로 오늘날 역사 발생적 원리는 여러 학자들에 의하여 여러 가지로 형식화되어 옹호되고 있다.

Freudenthal(1973)의 재발명 방법은 수학의 역사 발생과 개체발생의 유사한 동형성을 가정하면서 학습자의 현실로부터 수학화를 경험시킴으로서 현실을 수학적 수단으로 조직하여 개념화에 이르도록 하는 풍부한 맥락과 반영적 사고를 강조한다. 즉, 수학이란 역사적 발달 과정의 통찰에 의해서 획득된 지식이 점진적으로 형식화되면서 보다 고도의 기능과 통찰이 획득되어 간 과정이며, 수학 교육학의 주요 문제의 하나는 그러한 점진적인 형식화 과정을 수학 교육에 이용하는 방법에 관한 연구라고 말하고 있다. 그러나 그는 역사적 발생과정은 수학

화과정의 패러다임이지만 이를 학습자의 현재의 정 친구조에 연결시켜 수정해야하는 이유를 다음과 같이 말하고 있다. 어린 학습자는 인류의 학습과정을 수정된 방식으로 재현한다. 즉, 그는 역사가 실제로 일어난 그대로가 아니라, 과거의 사람들이 오늘날 우리와 비슷한 지식을 알았다면 실행했을 역사를 반복한다. 따라서 어린 학습자가 재현하는 것은 역사적 학습과정의 수정되고 개선된 판(edition)이다(Freudenthal, 1983). 또한 그는 연산의 알고리즘화 교육에서의 주안점에 관하여 다음과 같이 언급하였다. 연산 알고리즘의 습득은 시간이 걸리고 혼란을 야기 시키는 통찰의 개입을 피하면서 연산의 자동적인 수행을 가능하게 한다. 알고리즘화는 알고리즘을 마스터시키기 위한 것이며 이는 오류를 확인하고 수정하며 잊어버린 알고리즘을 복구하는 능력을 포함해야 한다. 알고리즘의 재발명은 지루하고 시간이 걸리는 활동이지만 그 결과는 시간을 들여 노력할 가치가 있는 것이며, 점차 단축되어 표준 알고리즘에 접근하는 점진적인 도식화, 형식화 과정이 포함되어야 한다(Freudenthal, 1991).

이와 같이 학교수학에서 재발명 방법과 활동성을 강조하고 있는 Freudenthal의 수학교육관은 직관주의 수리철학자들의 영향으로 수학적 현실로부터 출발하여 현상을 정리하는 인지적 수단을 찾아 확실성을 추구하는 활동을 중시하며, Dewey와 Bruner의 영향으로 기성수학을 탈피하여 활동 중의 학교 수학 지도를 강조하였으며 또한 Polya의 영향으로 수학적 개념의 발생 상태를 중시하는 학교수학에 뿌리를 두고 있다.

Project-Based Learning

학교수학에서 학생이 자신의 생활주변에서 활동과 경험을 통한 문제해결을 강조하는 프로젝트 기반 학습(Project-based learning, PBL)은 지필에 의존하거나 기계적인 암기 또는 교사주도 수업의 대안으로, 아동 중심적이고 통합적이며 문제해결을 중시했던 Dewey(1997)의 영향을 받은 미국의 수학교육학자 Kilpatrick이 1918년에 제안한 수업방법(Michael, 1997)이다.

프로젝트 기반 학습은 1950년대 학문중심 교육과

정의 대두로 관심이 퇴조하였으나 1970년대에는 유아 교육 및 초등 교육 분야에서 활발한 전개가 이루어졌으며 2000년대 들어서 구성주의 영향으로 다시 주목을 받게 되었다(Greeno, 2006). 이 학습 방법은 아동으로 하여금 그들의 일상생활에서 발생하는 문제를 협동하여 다양한 방법으로 통찰하여 해결하는 수업형태를 일컫는다. 즉, 주어진 과제를 해결하기 위해서 학습자가 실세계의 경험을 통하여 능동적이고 협동적으로 학습과정에 참여하여 최종 산출물을 만들어내는 과정에서 교육과정 또는 교과서에서 얻을 수 없는 열정, 발랄함, 추진력, 창조력 등을 키워가는 것을 목적으로 하는 학습방법이다.

프로젝트 학습의 사전적 의미는 주어진 문제를 해결하기 위하여 그 문제와 관련된 어떤 정보를 아동 스스로 찾아내고, 그 문제와 관련된 또 다른 새로운 것을 산출하거나 개선시키기 위해 설계된 일련의 계획된 작업을 말한다(Michael, 1997). 현행 학교에서 전개되는 수업과 프로젝트 기반 학습을 적용한 수업은 다음과 같이 비교할 수 있다.

<Table 1> Comparing Current School Lesson and Project Based Learning

	Current School Lesson	Project Based Learning
Object	Acquiring Knowledge, skill, and attitude	Object oriented learning activity Overcoming the bisect of knowledge and thinking
Contents	Textbook based on Current curriculum	In-depth exploration of textbook content Active interaction between children
Lesson Method	Teacher-led lectures	Investigation, inquiry, expression activity,

		interview etc.
Student	Who should learn knowledge and skills through learning	A subject who predominantly & actively creates and presents output
Role of Teacher	Instruct and regulate students' activity Convey content knowledge	Guide students' activities Meet the students' level and ability Conduct coordination and cooperative learning at the learning stage
Role of Student	Obey the teacher's instruction	Assignment of subject topics, systems, learning methods, and results processing Investigation, Inquiry, Interview etc.
Motivation	External factors such as evaluation and grades	Intrinsic factors such as affection for learning, challenging inquiry, positive self concept, and future-oriented achievement motivation
Efficacy	Achievement of purpose of Korean education	In addition to the purpose of education, various educational effects in cognitive

즉, 프로젝트 기반학습 이론은 실제적인 교수-학습 전략에 관한 통합적인 철학을 담고 있다. 그러므로 프로젝트 기반학습 이론은 학습자의 학습 발달을 상호통합적인 관점에서 도모하며, 이에 의하여 학습자가 흥미로운 주제에 대한 깊이 있는 탐구를 통하여 적극적이고 의미 있는 할 수 있도록 한다고 볼 수 있다(Chung et al., 2001). 또한 <Table 1>에서 알 수 있는 바와 같이 프로젝트 기반 학습은 학습 과정에서 학습자로 하여금 조사, 탐구, 면담 등의 활동하도록 유도하며, 이를 뒷받침하기 위해 교사는 안내자가 되어 학생 스스로 학습 과제와 방법을 선택하고 결정하도록 한다. 또한 학생의 생활 주변에서 그들의 관심과 흥미를 야기하는 과제를 직접 탐구하도록 하고 있다.

Mathematics Education and Epistemological Obstacles

학교수학에서 학습 내용 및 수업 방법 등을 적절히 설정했음에도 불구하고, 수학개념 자체에 내재하는 어려움 때문에 발생하는 또 하나의 교수-학습의 중요한 요인인 인식론적 장애가 학생들에게 자주 나타난다.

1) Epistemological Obstacles

‘인식론적 장애’라는 용어는 1938년에 바슐라르의 저서인 “과학정신의 형성(Bachelard, 2002)”에 처음으로 소개되었으며, 인식론적 장애를 과학사 특히 전-과학시대(pre-scientific era)의 연구에 매우 유용한 도구로 보고 있다. “과학정신의 형성”에서 그는 과학의 진보를 방해할 뿐만 아니라 과학의 퇴보와 일탈을 초래하는 주요 요인을 바슐라르는 과학이 다루는 대상의 복잡성, 난해성이나 인간 정신의 취약성에 있는 것이 아니라 인식 행위 자체 안에 숨어있는 어떤 무의식적 요소라고 하였다(Bachelard, 2002). 즉, 그 자체로는 의식되거나 개념화되지 않으면서 개념적 사유를 일정한 테두리 안에 제한하는 심리적인 요인과 과학적 사유 속의 반-사유를 인식론적 장애의 본질로 보았다. 바슐라르는 인식론적 장애의 주요 원천을 상식의 인식론에서 찾는다(Brown, 1996).

2) Epistemological Obstacles of Mathematics

인식론적 장애를 수학을 배우고 가르치는 상황으로 도입한 사람은 프랑스의 수학교육자인 Brousseau이다. Brousseau(1997)는 교수 체계에서 나타나는 장애는 학습 개념에서 나오는 결과이며 인식론적 장애의 관념은 교수의 오류, 주체의 불충분함, 지식의 내재적인 어려움 등에서 기인하기 때문에 다음과 같은 교수학적 장애를 갖는다고 하였다.

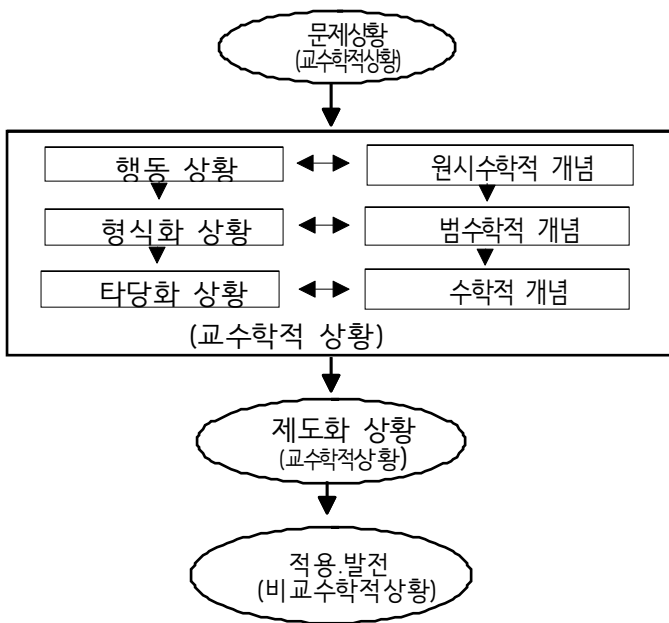
첫째, 개체 발생적 기원을 가진 장애: 이는 주체가 성장해 가는 동안에 주체의 신경생리학인 한계 때문에 생기는 것들로 특정 나이에 적합한 능력과 목적에 부합된 지식을 발달시키는 것과 관련된다.

둘째, 교수학적 기원을 가진 장애: 이는 교육체계 내에서 어떤 선택이나 계획에 의해서, 즉 교수 과정에서 생기는 장애들이다.

셋째, 인식론적 기원을 가진 장애: 이는 지식의 탐구과정에서 형성되는 피할 수 없는 장애이며, 개념의 역사에서 발견된다.

즉, 아동이 가지고 있는 수학적 장애 중에서 첫째와 둘째는 아동 개인의 내적 외적 장애이며 셋째는 개인의 처지와는 무관한 수학자체가 품고 있는 어려움에 기인한 장애이며 학교수학에서 가장 관심을 가져야 할 대상이다.

위와 같이 다양한 기원을 가진 교수학적 장애의 극복을 위해서 교사는 제기하는 문제에 대해 학생들이 질문을 하고, 새로운 지식의 획득이나 구성의 뒷받침을 이끌어낼 상황으로 이끌어 가는 것이다. 상황의 전개는 원시수학적 개념, 범수학적 개념, 수학적 개념들로 발전해 나가도록 상황을 전개해야 하며, 장애의 극복과정은 학생과 환경 사이의 일련의 상호작용에 따라서 행동의 문제, 형식화의 문제, 타당화의 문제들이 작용하는 교육적 상황 속에서 자발적이고 내적인 동기유발이 되어야 한다(Brousseau, 1997)는 것이다. 이러한 수학적 개념의 발달 상태에 따른 수업의 진행과정은 [Figure 1]과 같다.



[Figure 1] Situated Learning Process of Brousseau

The Principles of Polya's Problem Solving

Polya는 헝가리 출신의 저명한 수학자로서, 1924년에 무늬를 무시하면 테셀레이션의 방법이 17가지 뿐임을 증명한 것으로도 유명하다. 폴리아의 수학교육관은 다음과 같다(Schoenfeld, 1987).

가르친다는 것은 과학이 아니라 예술이다. 만일에 그것이 과학이라면 가르치는 최선의 방법이 있을 것이고, 모든 교사가 그 방법으로 가르쳐야 할 것이다. 그러나 그것은 과학이 아니기 때문에 교수법의 개인차가 매우 크다. 교수법에서 가장 중요한 것은 활동성, 즉 활동적 학습이고, 특히 수학교수법에서 중요한 것은 문제해결전략을 개발하는 것이다.

이러한 관점에서 주어진 수학문제를 해결하는 방법을 Polya는 그의 저서 '어떻게 문제를 풀 것인가?'(Polya, 1957)에서 문제를 해결하기 위한 기본적인 전략과 네 가지 단계를 수행하는 원리를 제시했다. 즉, 문제의 이해 단계에서 10여개의 항목, 계획 단계에서 17여개의 방법을 제시하였으며, 실행단계, 반성단계의 4단계로 원리를 제시하였다. <Table 2>

에서는 Polya가 제시한 네 단계의 내용 중에서 초등학교 수준에 적합한 항목만을 제시하고, Polya의 문제해결 전략을 적용하는 수업시간에 프로젝트 학습을 병행할 수 있는 내용을 병기하였다.

<Table 2> Poly's Problem Solving Strategy Applied Project-based Learning

Steps	Contents	Contents of Project-Based Learning
Understanding the problem	•What is being asked? •Can you think of a picture or diagram that might help you understand the problem? •Is there enough information or is more information needed? •What is known or unknown?	• Active interaction between children • Various activities of expression • Learner's internal motivation • Affection for learning, challenging inquiry
Devising a Plan	• Guess and check • Look for a pattern • Make a list • Draw a picture • Work backward • Use Pigeon hole principle • Solve their own way	• Flexibility in coordination and thinking at the learning level • Combination with goals in different areas such as knowledge, skill, and attitude • Integration of curriculum areas, class topics and community issues
Carrying out the plan	• Use the knowledge of your own plan to formulate and calculate accurately • The problem-solving process in	• Objective-oriented learning activities • Create output as a result of task resolution • Leading and active role of learners • Integration

	mathematics is organizing sub-concepts for the problem solving • Check each step • Verification of the legitimacy, reasonability and reliability of the implementation process	between subject and learning topics • Increase cooperative abilities and social skills • Disclosure and announcement of final products • Form responsible • Perform tasks in teams rather than individual approaches
Looking Back	• Check the results gotten from the carrying out • Does your answer make sense? • Is it reasonable? • Generalize • Can you use another method	• Recognizing the relevance of school and society • Integration of curriculum areas, class topics, and community issues • Positive self-concept, future-oriented motivation, responsibility for learning • Overcome the bisects of knowledge and thinking • Various educational effects in cognitive, affective, and social areas

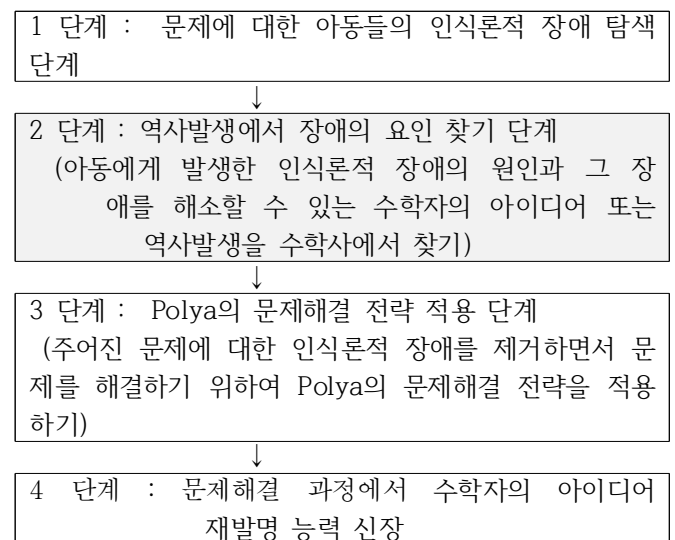
특히, 반성과정은 학생이 접해본 적이 없는 문제를 해결하는 데에 영감을 떠올리는 능력(수학적 힘)을 얻는 방법이다. 이에 대하여 프랑스 수학자이자 철학자인 앙리 푸앵카레는 다음과 같이 말하였다 (Poincare, 1946).

“유사한 문제의 해결방법을 예측할 수 없었거나 확실성이 부족해서, 시행착오의 복잡한 계산과정을

거쳐 결과를 얻을 때까지에 겪은 고난은 가장 값진 것이다.”

The Process of Reinventing Project of Mathematicians' Ideas

이 장에서는 II장에서 논의한 인식론적 장애에 기인하여 아동들이 문제해결에 어려움을 겪는 전형적인 주제를 중심으로, 폴리아의 문제해결 전략을 적용하고 또한 구성주의 교수-학습 방법인 프로젝트 기반학습에서 강조하는 아동의 활동 내용을 참조하여, 교실에서 다음의 단계에 따라 그 문제를 해결하는 과정을 통하여 학생 스스로 수학자의 아이디어를 재발명하는 지도 방안을 [Figure 2]의 흐름도에 따라 구성한다.



[Figure 2] The extension of reinvention ability process

Explore Students' Epistemological Obstacles for Problems

1) Occurrence of Epistemological Obstacles

학생들은 비약에 의한 진전으로 특정한 지식을 창조하는 것이지만, 부적합한 일시적인 개념이 발생하여 지속되기 때문에 종종 인지적 단절을 일으킬

수밖에 없다. 따라서 교사는 학생들이 가지게 되는 인식론적 장애를 발견해야 하며, 발견된 장애를 수학교수에 긍정적인 방향으로 활용하거나 제거해야 한다.

2) The Origin of Epistemological Obstacles in Mathematics

BC 5세기 파르메니데스(Parmenides)의 제자이자 엘레아(Elea)학파의 일원이었던 그리스의 철학자 제논(Zeno of Elea, B.C. 490-430년 경)이 파르메니데스의 신념인 ‘모든 것은 하나이다.’ 따라서 복수(plurality)나 변화란 있을 수 없다는 일원론적 철학에 반대하는 어떠한 주장도 모순과 불합리에 이를 수밖에 없음을 보여주려고 내놓은 최초로 귀류법(reduction ad absurdum)을 사용한 40여개의 제논의 역설이다. 그중에서 현재까지 알려진 4개의 역설은 아리스토텔레스의 설명에서 따온 이름으로, 소크라테스의 변증술의 모태가 된 이분법(Dichotomy), 아킬레스(Achilles), 화살(Arrow), 주로(Stadium)만이 남아있으며, 이 역설이 고대 그리스 수학자들의 전형적인 인식론적 장애의 시작인 것으로 알려져 있다(Boyer, 1968).

고대 그리스 수학자들이 겪었던 이러한 인식론적 장애의 원인은 그 당시에는 무한개념, 무한소개념, 연속개념, 극한개념 등의 개념이 아직 정립되지 못했기 때문이다. 또한 이러한 개념은 현재의 학생들에게도 불가사의한 개념일 수도 있다. 따라서 현재의 학생들에게 발생하는 수학적 개념에 대한 인식론적 장애의 원인은 이러한 개념들이거나 그와 유사한 개념이 될 수 있으며, 학습내용과 역사적 사실과의 간극이 있거나 심리적으로는 인지발달 단계에 따른 인지 능력을 넘어서는 개념이 될 수도 있다.

3) Exploring Obstacles from School Situation

자연수가 유리수와 소수개념에 주는 장애를 학교 상황에서 살펴볼 수 있다. 즉, 3과 0을 곱하는 수를 예를 들면, 0×3 은 0을 3번 택하는 것으로 $0+0+0=0$ 으로 잘 이해되나, 3×0 은 어떻게 이해할 수 있을까? ‘ 3×0 ’과 같은 오류는 지금까지 곱을 획득하는 과정에서 실제 양을 가진 상황 하에서 학습되었기 때문에 ‘3이라는 양을 0번 택하는 것’이라고 사고하게

되고 이를 해결할 수 없게 된다. 이는 문화나 교수공학이 자연수 집합을 더 큰 집합으로 확대시켜 모든 수에 대해 참인 성질에 이르게 하도록 가르칠 수 없는 점이다. 또한, 학생들은 개인적으로 이해하는 수단을 발명해서 이후의 학습에도 적용하려는 것이다. 이를 해결하기 위해 ‘0을 3배하는 것은 1을 3배하는 것보다 작다, 0은 1빼기 1이다, $3 \times 0 = 0 \times 3 = 0$ ’과 같은 수단을 제공할 수도 있겠지만 어느 것도 직접적인 오류개념을 변형시켜 주지 못한다.

따라서 학생들에게서 관찰되는 오류는 수학의 역사적인 실제 속에서처럼 특수한 것 주변이나 매우 일반적인 개념 주변에 모여 있다. 교수학은 이러한 장애로 작용하는 학생들이 갖는 개념을 확인해야 하며, 심리학적이고 인지적인 측면 이상으로 장애의 사회적, 문화적 특성도 함께 연구되어야 한다. 그리고 교수학적 변환의 기울기가 커질수록 환경과 지식 사이의 차이도 커질 것이며 인식론적 장애로써 작용할 위험도 더 커질 것이라 예측할 수 있다.

4) Diagnosis of Epistemological Obstacles

학교수학에서 수학의 인식론적 장애의 진단(Kim et al., 1998)이란 아동의 심리발달에 적합한 수학내용을 제시하여, 아동의 인식론적 장애에 따른 오류를 파악하는 것이며 처방이란 진단평가에서 얻은 자료를 통하여 오류유형을 분류한 다음 교사가 면담을 통하여 아동으로 하여금 오류를 교정하는 과정을 말한다. 처방 시에는 반드시 위에서 제안한 주제에 적절한 교구를 투입하는 것이 중요하다. 또한 학생들이 이해하지 못하는 수학적 개념과 기능, 학생들이 수학문제를 푸는데 사용하는 사고과정과 전략, 수학에 대한 학생들의 태도, 학생들의 학습형태 등을 조사하여 발달심리학과 역사발생 원리를 적용한다.

(1) Methods of Diagnosis

진단은 다음과 같은 지침을 마련한 다음 그 절차에 따라 수행한다.

- 각각의 개념을 이해시키기 위한 조직적인 지도 방법
- 진단할 때 사용하는 교구사용에 대한 구체적인 지도방법
- 학생들의 오류유형 분석 지침

- 진단에 유용한 게임에 대한 설명
- 교실에서 이루어지는 진단에 필요한 모든 요소의 운영 지침 등을 마련

진단평가의 목적은 연속적인 지필평가와 면담으로 구성하여 아동의 능력을 점진적이고 포괄적으로 분석하여 아동의 이해도와 계산능력에 관한 자료를 수집하는데 있다.

(2) Implementation of Diagnostic Evaluation

진단평가 문항을 투여할 때는 다음사항을 유념해야 한다.

- 전체 학급에 투여할 것인지 또는 소집단이나 개인에게 투여할 것인지를 결정한다.
- 현재 가르치고 있는 내용과 평가하고자 하는 학생의 수준에 적합한 문제를 출제한다.
- 가급적이면 시간제한을 두지 말아야 한다.
- 아동에게 두 쪽 이상의 시험지를 배포하지 않는다.
- 아동이 시험지를 작성할 때 유심히 지켜보고 참고사항을 메모한다.
- 아동이 너무 어려워하는 문제는 풀지 않도록 한다.
- 아동이 오답을 적은 경우에는 한 두 문제의 결과에서 아동의 오류유형을 분석하기 곤란하므로 개념과 기능을 평가할 수 있는 난이도가 주어진 유사문항을 5개 정도 출제한다.

Finding Obstacles from Historico-Genetic

1) Factors of Epistemological Obstacles

지식의 역사가 입시에만 전념하여 학생들은 합격하기 위하여 그 지식을 뜻도 모르는 채 암기만 할 때, 인식론적 장애가 되는 개념이 발생하여 지속된다. 학생들이 획득하는 지식은 그 지식이 정당화할 수 있는 상황에서 행하는 학습의 결과이며, 서로 다른 지식 및 서로 다른 복잡성을 가진 과제 수행의 결과이어야 한다. 이러한 관점에서 입시 등과 유사한 부적절한 환경에 의해서 학습이 인지적 단절을 일으키게 된다고 보았으며, 학생들의 범하는 오류에 대한 해석과 그 오류들의 생성 방식을 재검토해야

한다고 주장하였다(Brousseau, 1997). 즉, 인식론적 장애는 개체 발생의 기원, 교수-학습 방법뿐 아니라 지식의 역사적 발생 자체에서도 발생하고 있다.

2) Types of Epistemological Obstacles in Mathematics

부르소(Brousseau, 1997)는 수학에 인식론적 장애가 다음과 같은 측면에서 확인된다고 하였다.

- 첫째, 반복되는 오류

예를 들어 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $0 \times a = 0$, $\sqrt{a^2} = a \dots$, 등이다.

- 둘째, 수학의 역사에 기인한 장애.

수학사에서도 인지적 단절 현상이 관찰된다.

셋째, 학습내용과 역사적 사실과의 간극

따라서 교사는 두 사실을 비교해 보고, 인식론적인 특징을 정립해야 할 것이다.

3) Overcoming Epistemological Obstacles

장애는 또한 교수학적인 문제를 제기한다. 학생의 수학적 지식의 습득이 고전적 모델에 의해 정당화된 교수학적 실체가 복습되거나 기각되어야 한다. 그러나 고전적 모델은 교육과정을 가르치는데 있어서 교육체계와의 내적인 (학급 내에서와 학급 사이에서)협상에 영향을 준다. 수업의 기능은 새로운 지식을 도입하여 이전에 배워서 사용되고 있지만 새 지식과 양립할 수 없는 오래된 개념은 잊어버리거나 기각하도록 격려하는 것이다. 이를 위해서는 오류의 진단, 설명, 기술의 수정, 교사와 학생 사이의 의무와 책임을 다시 재고해야 한다. 인식론적 장애는 제도화된 지식의 형식화 안에 들어 있는 것이 아니라, 교사가 지식의 이해와 기능을 확실히 하기 위해 구성된 표현 안에 들어 있으므로, 교수는 지식을 상황과 연계시키고, 제도화시키는 과정이 필요하다. 그러므로 학생은 그가 배우는 지식과 학습 상황을 기억해야 하고, 그 자신의 방법으로 기억을 조직해야 한다. 학생들의 내적인 관계와 과거의 지식을 무시한 채 지식을 가르칠 수는 없다. 인식론적 장애에 대한 인식과 교수학적인 관계 속에서 공식적으로 다루어야 할 것은 학생의 발달의 역사, 학생의 지식의 역사성과 입장을 인식해야 한다. 이러한 관점은 교사 자신의 인식론을 수정할 필요성과 대중

전체와의 noosphere(지적 사고의 총체)를 형성하는 것과 교사와 학생 사이의 협상을 위한 토대로 유용하다(Brousseau, 1997).

Application of Polya's Problem Solving Steps

이 단계에서는 주어진 문제에 대한 인식론적 장애를 제거하면서 문제를 해결하기 위하여 프로젝트 학습과 병행한 Polya의 문제해결 전략을 적용하는 방안을 알아본다.

Polya(1957)는 수학교육의 주요 목적을 수학적으로 사고하는 능력과 문제해결 능력을 개발하는 데에 두고, 수학 학습지도 원리로서 활동적 학습의 원리, 동기유발 원리 및 비약 없는 단계의 원리를 제시하였다. 그는 학습하는 최선의 방법은 스스로 발견해 내는 것이고, 스스로 발견하지 않으면 안 되었던 것은 필요하게 되었을 때 다시 사용할 수 있는 길을 마음속에 남겨 놓는 것이라고 하였다. 또한 효과적인 학습을 위해서는 될 수 있는 한 생각할 시간을 충분하게 주어서 학습자가 스스로 발견하도록 해야 하며, 가능한 한 자유와 주도권을 학생에게 주어야 하며, 성급하게 해답을 제시하고 개념과 규칙을 형식화해서는 안 된다. 또한 교사의 의무는 수학이 흥미롭고 노력할 만한 가치가 있다는 것을 학생들에게 확신시키는 일이므로, 학습 내용에 대한 흥미는 학습을 위한 최적의 동기가 되므로 학생의 경험과 관련이 있으며 학생에게 의미가 있도록 문제 상황을 선정하고 제시함으로써 학습내용 자체에 대한 지적 호기심을 갖게 하고, 학습 그 자체에서 오는 즐거움과 발견의 기쁨을 경험하도록 해야 한다고 하였다. 그리고 Polya는 귀납과 유추에 의한 “사려있는 추측”을 통한 발견적 사고와 문제 해결교육의 중요성을 강조하면서 이는 시범, 모방, 실행 발문과 권고에 의한 도움에 의해 습득될 수 있는 것이라고 하였으며 특히 훌륭한 교육은 학생들에게 스스로 발견의 기회를 체계적으로 제공하는 것으로 보고, ‘수학적인 발견은 어떻게 이루어지며 문제는 어떻게 해결되는가?’라는 문제를 연구하여, 발견·발명의 방법과 그 교육방법에 대한 체계적인 설명을

시도했다고 한다(Woo, 2000). 이러한 Polya의 문제해결 전략을 적용한 현장 연구 사례 중 몇 가지를 Appendix 1에 정리하였다.

Appendix 1에서 알 수 있는 바와 같이 Polya의 문제해결 전략을 적용한 대부분의 연구사례들은 학생들의 적용 방법에 있어서는 발문, 학습지 읽기 등의 방법이며 적용 후의 효과로는 문제 자체의 이해력 신장 또는 흥미유발 등에 초점을 두고 있는 것으로 보인다.

본 연구에서는 인식론적 장애의 극복, 학생들 간의 활발한 상호작용을 유도, 긍정적 자아개념, 미래 지향적 성취동기, 학습에 대한 책임감, 과제 해결 결과로서 산출물 작성, 수학자의 아이디어 재발명을 위한 역동적인 문제해결 방안을 알아보기 위해서 <Table 2>에서 제안한 프로젝트 학습을 적용한 Polya의 문제해결 전략을 적용하기로 한다.

Enhancing the Reinvent Ability of the Mathematician's Ideas

이 절에서는 기존의 수학자의 아이디어를 현재의 학생들이 재발명할 수 있도록 도와주는 이론을 소개하고, 그 이론의 취지에 따른 학생들의 재발명 능력 신장에 필요한 요소들을 알아보기로 한다.

1) The Method of Guided Reinvent

Freudenthal(1973)에 의하면 사고는 정신적으로 지속되는 활동이며, 행동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 수행하는 것이라고 하여 학습자에게 수학적 활동의 재발명을 경험시키는 교수-학습 방법이 중요하다고 한다. 즉, 진정한 의미를 갖는 지식은 능동적인 활동을 통해서만 얻을 수 있다는 것이다. 또한 그는 대화를 통해 현상의 본질을 인식시키는 Socrates의 산파술의 가치를 강조하면서, 교사의 주도하에 선조들의 발명과정을 현재의 학습자의 상황에서 재해석하여 재발명시킬 것을 요구한다. 즉, 어린 학습자는 인류의 학습과정을 수정된 방식으로지만 재현한다. 학습자는 역사가 실제로 일어난 대로가 아니라, 과거의 사람들이 오늘날 우리가 알고 있는 것과 같은 것을 알았더라면 일어났을 것과 같이 역사를 반복한다. 어린 학습자가 재현하는 것은 역

사적 학습과정의 수정되고 개선된 판이라고 하였다 (Freudenthal, 1973).

2) Mathematics Related to Reality

전통적인 학교수학에서는 현실적인 상황이 결여된 인위적이고 장식적인 의사 현실적인 내용이 많은 것으로 나타나고 있다. 수학을 지향하는 교육에서, 문제와 문제해결 활동은 대단히 중요하다. 이때 문제는 현실상황에서 제기되고 발생해야 하며, 학생들은 주변 상황에서 문제를 인식하는 것을 학습해야 한다. 이에 대하여 Freudenthal(1981)은 '가장 구체적인 문맥을 통해 가장 추상적인 수학을 가르쳐야 한다'고 주장한다. 즉, 수학화는 소음이 있는 현상 가운데 그 정리수단의 본질을 찾는 것으로 보는 것으로, 무엇보다도 학습자의 현실상황을 수학화하는 경험으로부터 출발하여 점진적인 수학화 과정을 재발명시키기 위한 풍부한 문맥과 반영적 사고가 중요하다고 한다.

3) Formation of Mental Object

개념획득의 철학과 교수학은 Socrates의 산파술에서 비롯된 '잊혀진 개념의 상기'라는 의미로 예시된 이래 오랜 역사를 가지고 있으며 최근에 새롭게 강조되고 있다. 예를 들어 Thom(1973)의 통찰에 의하면, 수학교육이 당면한 실제적 문제는 학생의 정신가운데의 수학적 의미와 안목의 개발과 학생의 정신가운데의 수학적 대상의 생존의 문제라고 한다. 따라서 학생들이 문제를 해결하기 위해서는 개개의 수학적 지식의 실체가 현상으로부터 출발하여 그 정리수단인 본질을 직관적으로 인식하여 심상을 구성하고 정신적 활동으로 조직하도록 하여 의식적인 개념화를 시도하도록 해야 한다(Freudenthal, 1983)고 본다. 즉, 직관적 인식이 결여된 조속한 형식적 취급은 기억에 의존하는 명목적인 지식이 되기 쉬우며, 현상으로부터 출발하여 그 현상을 조직하는 수단인 본질로서 수학적 지식이 도입될 때 그 바탕에 깔려있는 직관적 의미에 대한 통찰이 가능하고, 이를 바탕으로 그 핵심을 분석하고 형식화하는 점진적인 수학화 과정을 거쳐서 수학적 지식의 진정한 이해가 가능하다는 것이다.

따라서 학생으로 하여금 수학자의 아이디어를 재

발명할 수 있는 능력을 신장하기 위해서는 다음과 같은 과정이 필요할 것으로 보인다.

첫째, 배워야 할 개념에 대한 인식론적 장애를 교사가 미리 예측하여 학생들로 하여금 그 장애를 극복할 수 있는 방안을 마련한다. 둘째, 그 개념을 발명한 발명가의 아이디어와 동형이며, 학생들의 실생활과 관련된 모델을 학생들이 경험하도록 한다. 셋째, 모델을 통해 경험한 내용을 통하여 학생들로 하여금 그 개념에 대한 심상이 형성되도록 하여 형식화하는 점진적인 수학화 과정을 거치도록 안내한다.

Implementation of the Project for Improving Reinvent Ability

이 장에서는 앞에서 구성한, 수학자의 아이디어를 Polya의 문제해결 전략(Polya, 1957)에 따라 아동들이 문제를 해결하는 과정에서 수학자의 아이디어를 재발명할 수 있는 능력의 신장 프로젝트를 교실 수업에 적용하는 모델을 구현하는 방안을 제시한다.

Participants

본 연구의 참여자는 전라남도에 있는 M초등학교의 6학년 학급으로 선정하였다. 학생들의 학력수준과 가정의 사회적, 경제적 수준은 중위수준에 해당되며 대부분의 학생이 가정생활 분위기가 매우 안정되어 있고, 지역의 교육, 부모의 가정교육, 문화적 여건이 비교적 잘 형성되어 있다.

Research Design

본 연구의 설계는 6학년 2학기 2단원 비례식과 비례배분을 중심으로, M초등학교 교사들과 협의하여 [Figure 2]에서 제시한 재발명 능력 신장 프로젝트에 따라 교실수업을 구현하도록 구안하였다.

Instruction

비례식과 비례배분을 지도하기 위하여 수업을 재구성하여 총 5차시에 걸쳐서 교실수업에서 시행한 내용은 Appendix2와 같다.

또한 [Figure 2]에서 제시한 재발명 능력 신장 프로젝트를 적용한 교실수업의 구현과정은 다음과 같다.

(1) 1단계 : 문제에 대한 아동들의 인식론적 장애 탐색 단계

- 현악기의 긴 줄과 짧은 줄을 튕기면 긴 줄의 음이 더 높지 않을까?

(왜냐하면 더 기니까.)

- 현악기의 두꺼운 얇은 줄을 튕기면 두꺼운 줄의 음이 더 높지 않을까?

(왜냐하면 더 두꺼우니까.)

- 도대체 7음계는 누가, 왜, 어떻게 만들었을까? 그 아이디어는 무엇일까?

(2) 2 단계 : 역사발생에서 장애의 요인 찾기 단계

□ 아동의 인식론적 장애를 극복하는 데에 도움이 되는 수학사

- 피타고라스(Pythagoras, B.C. 582~497?)학파

피타고라스는 지중해 북쪽에 있는 에게해의 사모스(Samos)섬에서 태어났다. 피타고라스학파는 금욕주의와 채식만을 하는 등, 수도사 생활과 비밀스러운 집단생활을 영위했으며, 피타고라스학파의 교육은 완전히 말로만 행해지고 그들의 철학은 자연수가 만물의 근원이라는 가정위에서 세워졌다. 또한 피타고라스학파는 분수를 이용하여 현의 길이의 비로 7음계를 발견하였다.

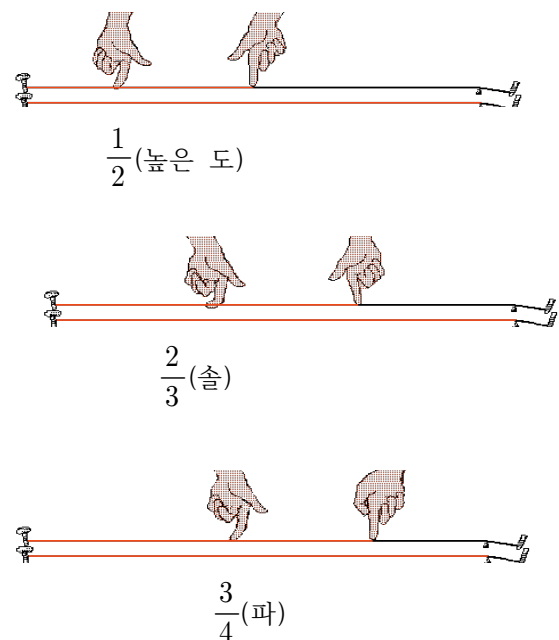


[Figure 3] Making 7 Scales and Chords of Pythagorean Scholars

- 7음계

피타고라스학파는 분수를 활용하여, 두 현의 장력이 같을 때, 현의 길이가 2대1이면 8도 음정, 3대2이면 5도 음정, 4대3이면 4도 음정 등의 방법으로 7음계와 장조, 단조를 만들었다.

즉, 이러한 피타고라스학파의 실험과정을 알지 못



[Figure 4] Scales and Fraction Number

<Table 6> 7 Scales

Scale	C	D	E	F	G	A	B	C
Ratio of length	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27 : 16	243 : 128	2:1

해서 인식론적 장애가 유발된다.

(3) 3 단계 : Polya의 문제해결 전략 적용 단계

① 문제의 이해 단계

□고음, 저음 차이 알아보기

○학생의 바이올린 연주를 들으면서 고음과 저음을 구별하며 들어 본다.

○바이올린을 보고 ‘현의 길이가 길수록 저음이 난다’를 탐색한다.

○바이올린을 보고 ‘현의 굵기가 굵을수록 저음이 난다’를 탐색한다.

○바이올린 악기를 보고 7음계 소리를 내는 원리를 토의한다. (줄의 굵기, 줄의 길이)

(㉮: 바이올린 악기)

□현악기 속의 수학적 비밀 찾기

○현악기의 종류와 7음계 소리를 내는 방법에 대해 조사 내용을 발표한다.

(㉮: 현악기 특징 프레젠테이션)

○음계 ‘도’를 기준으로 하여 줄의 길이 비율이 다 음과 같을 때 실제 길이를 구한다.(계산기를 활용하여 구하고 반올림하여 소수 첫째자리까지 나타냄)

	도	레	미	파	솔	라	시	도
줄의 길이 비율	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
실제 길이 (cm)	25.5							

○비의 성질(비의 전향과 후향에 0이 아닌 수를 곱하여도 비율은 같다)을 이용해 찾는다.

이동한 거리	1	2	3	4	5	6	7
걸린 시간	5		15				

○비의 성질(비의 전향과 후향에 0이 아닌 같은 수를 나누어도 비율은 같다)을 이용해 찾는다.

이동한 거리	300	150		50	10
걸린 시간	120		40		

-비의 성질 두 가지를 이해하고, 현의 길이를 표로 작성할 때 연계가 될 수 있도록 계산방법을 익히게 한다.

□줄로 7음계 만들기

○납시줄을 이용하여 음계를 만든다.

○스마트폰 어플(strings tuner)을 이용하여 음계를 확인한다.

○음계가 맞지 않은 경우 다시 수정 보완한다.

○음계를 만들기 위해 필요한 수학적 지식을 찾는다.

-스마트폰 어플을 활용한 음계 확인방법을 안내한다.
-송곳을 사용할 때 손이 상처가 나지 않게 한다.
-납시줄을 할핀에 고정할 때 팽팽하게 유지하게 한다.

② 계획단계

□현악기 계획하기

○모듬별로 모듬장을 선출하고, 모듬의 이름을 정한다.

○모듬에서 만들 악기를 정하고 제작 계획서를 만든다.

-주제 해결을 위해 모듬 인원은 3~4명으로 제한하고, 주제에 알맞은 이름을 정하도록 예시 자료를 투입한다.
-주변에서 볼 수 있는 현악기를 선택해 악기가 발명되는 과정을 중심으로 수리적인 공통 특징(줄의 길이 비율)을 찾아보고 악기를 정하게 한다.
-자료조사, 재료 준비, 전시 설명회 자료, 발표자, 활동지 기록자 등 모듬에서 필요한 역할을 정하게 한다.

③ 실행 단계

본시 주제	피타고라스 음계 원리를 이용하여 악기 만들기	차시	3-4 / 5	배움 목표	피타고라스 음계 원리를 이용하여 악기를 만들 수 있다.
배움 자료	악기 만들기 필요한 재료, 스마트폰 어플, 계산기	지원 자료			음계에 따른 현의 길이 비율, 스마트폰 어플 활용 방법 자료

배움 활동
□피타고라스의 음계 원리 찾기 □악기 만들기 □악기 수정하기

배움 지원
○피타고라스 음계의 비율이 결정되는 과정을 중심으로 안내하기 ○악기를 만든 후 음계를 확인하기 위한 스마트폰 어플 이용에 대해 안내하기

□ 피타고라스의 음계 원리 찾기

○ 피타고라스의 음계 원리를 조사 발표한다.

피타고라스 음계								
음의 높낮이는 진동수에 따라 달라지는데 진동수가 많으면 높은 소리, 진동수가 낮으면 낮은 소리가 난다. 피타고라스는 일정 길이의 현을 여러 정수비로 조율해 나가며 그 비례에 따른 개별 진동수 비를 구하여 자연 상태에서 인간의 귀를 편안하게 하는 완전 5도 음계를 만들었다.								
	도	레	미	파	솔	라	시	도
길이 비율	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

-피타고라스의 음계 원리에 너무 치중하지 않고 각 음계의 비율이 결정되는 과정을 중심으로 발표하게 한다.

□ 악기 만들기

○ 준비한 재료를 바탕으로 악기를 만든다.

-만들기 활동 과정 중에 구상지와 맞지 않을 경우 구상지를 수정하면서 만들도록 안내한다.
-칼이나 가위를 사용할 경우 손이 다치지 않게 한다.
-자신의 맡은 역할이 끝나도 모둠원과 함께 협동해서 활동하게 한다.

(㉮: 모듬별 준비물-자, 칼, 가위, 테이프, 낚시줄, 할핀, 두꺼운 도화지)

④ 반성단계

□ 악기 수정하기

○ 스마트폰 앱(strings tuner)을 이용하여 음계를 확인하여 수정한다.

-악기를 완성하고 각 음계를 나타낸 다음 음계가 맞지 않으면 스마트폰 앱을 이용하여 수정하게 한다.
-스마트폰 확인을 위해 조용한 가운데 만들기 활동이 이루어지게 한다.
-수정이 필요한 경우 현의 길이를 다시 확인하게 한다.

(㉮: 앱(strings tuner), 계산기)

(4) 4 단계 : 문제해결 과정에서 수학자의 아이디어 재발명 능력 신장

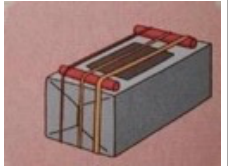
본 시 주제	악기 발표 하기	차시	5/5	배움 목표	수학적 원리를 이용한 악기를 발 표하고 전시할 수 있다.
배움 자료	모듬별 제작한 악기, 전시 설명 자료, 유성매 직, 색도화지, 구상지	지 원 자료			상호평가지

배움 활동	
□ 설명자료 만들기 □ 발표 및 전시하기	

배움 지원	
○ 악기 발표 전에 상호평가지에 대한 안내하기	

□ 설명자료 만들기

○ 전시에 필요한 설명 자료를 악기의 특징을 중심으로 만든다.

<고무줄 가야금-예시> 고무줄 가야금은 줄이 3개로 이루어져있으며 특징으로는 고무줄 두께를 다르게 하여 음계의 소리를 낼 수 있도록 만들어 졌다. 또한 피타고라스의 음계 원리에 맞춰 손의 누르는 위치를 달리 하면 7음계를 낼 수 있다.	
---	---

□ 발표 및 전시하기

○ 모듬별로 만든 악기의 특징을 중심으로 구상지와 함께 발표한다.

○ 모듬의 발표를 듣고 상호평가지에 상호평가를 한다.

-악기 발표 전에 상호평가지에 대한 사전 안내를 하여 평가가 원활하게 진행되게 한다.

○ 교실 뒤편 사물함 위에 전시 설명 자료와 만든 악기를 전시한다.

○ 프로젝트를 통해 알게 된 점이나 느낀 점을 발표한다.

4) 평가 계획

(1) 이해단계

성취 기준	7음계와 악기의 특징을 이해할 수 있다.	
평가 시기	7음계의 이해단계, 악기별 특징 조사하기	
평가 방법	관찰 및 조사 발표	
평가 수준	상	7음계의 수학적 특징과 악기의 특징을 잘 이해한다.
	중	7음계의 수학적 특징과 악기의 특징을 대체로 이해한다.
	하	7음계의 수학적 특징과 악기의 특징을 이해하는 데에 어려움을 느낀다.

(2) 계획단계

성취 기준		7음계와 악기의 특징을 생각하며 악기 만들기를 계획할 수 있다.
평가 시기		악기별 특징 조사하기, 악기 선정 및 계획서 만들기
평가 방법		관찰 및 조사 발표
평가 수준	상	7음계의 수학적 특징을 생각하며 악기 만들기를 계획한다.
	중	악기 만들기를 계획한다.
	하	악기 만들기를 계획하는데 어려워한다.

(3) 실행단계

성취 기준		피타고라스의 7음계 원리를 이용하여 악기를 만들 수 있다.
평가 시기		악기 만들기 및 수정하기
평가 방법		구상지 평가
평가 수준	상	7음계 원리를 적용하여 악기를 만들 수 있다.
	중	7음계에 맞게 악기를 만든다.
	하	7음계에 맞게 악기를 만드는데 어려워한다.

(4) 반성단계

성취 기준		7음계를 이용한 다양한 악기를 발표하고 전시할 수 있다.
평가 시기		나만의 악기 발표 및 전시하기
평가 방법		관찰
평가 수준	상	7음계의 원리를 이용한 다양한 악기를 제작 발표하고 전시한다.
	중	7음계를 표현할 수 있는 악기를 발표하고 전시한다.
	하	7음계를 이용한 악기를 발표하는데 어려워한다.

(5) 발명가의 아이디어 재발명 단계

성취 기준		7음계를 이용한 악기의 아이디어를 이해할 수 있다.
평가 시기		나만의 악기 발표 및 전시하기
평가 방법		관찰
평가 수준	상	7음계의 수학적 원리를 이용한 악기의 제작 과정을 이해한다.
	중	7음계를 이용한 악기를 발표하고 전시한다.
	하	7음계의 수학적 원리를 이용한 악기를 발표하는데 어려워한다.

Conclusion

본 연구는 대학에서 이론과 그의 배경을 제시하고 부설초등학교에서 그 이론을 실험하는 대학-부초 공동연구의 결과물이다. 대학과 부초 간 몇 차례의 토론과 협의를 거쳐 교실 수업을 통하여, 학생들이 수학자의 아이디어를 재발명하는 과정을 경험함으로써 개념의 본질을 의미충실하게 이해하고 수학에의 흥미를 유발시키려는 노력의 일환이었다. 이를 위하여 수학 문제해결에 적절한 Polya의 문제해결 전략과 구성주의의 일환인 프로젝트 기반학습법을 융합하여, 학생으로 하여금 수학자의 아이디어를 재발명하는 방안을 구현하기 위한 학교수업을 지켜보면서 느낀 점을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학교수학의 핵심인 되는 아동의 수학적 개념의 심상형성을 위해서는 그 수학적 개념의 원리 지도에 치중하기보다는 그 개념이 발생되어온 과정을 아동 스스로 경험하도록 하는 것이 좋을 것으로 보였다. 즉, 비와 비레식의 원리보다는 각 음계의 비율이 결정되는 과정을 경험하고 발표하면서 아동 자신의 비와 비레에 대한 심상이 형성되도록 하는 것이 좋을 것으로 보였다.

둘째, 개념의 심상형성과정에서는 학생들의 실생활에서 얻을 수 있는 소재를 활용하는 것이 바람직하며, 주제 해결을 위해 모둠 인원은 3~4명으로 제한하고, 주제에 알맞은 예시 자료를 투입하는 것이 좋을 것으로 보였다. 즉, 비와 비레의 아이디어를 지도하기 위해서는 주변에서 볼 수 있는 현악기 등을 선택해 악기가 발명 또는 제작되는 과정을 중심

으로 수학적인 공통 특징(줄의 길이 비율)을 찾아보도록 하는 것이다.

셋째, 모둠인원 각자에게 자료조사, 재료 준비, 전시 설명회 자료, 발표자, 활동지 기록자 등 의 필요한 역할을 정하고, 비와 비례의 아이디어를 이용하여 악기 제작을 완성한 다음에는 다음과 같은 확인 활동을 모둠별로 진행하도록 하는 것이 좋을 것으로 보였다. 즉, 제작한 악기의 각 음계가 맞지 않으면 스마트폰 앱을 이용하여 수정하도록 하면서 비와 비례의 원리를 적용하여 현의 길이를 다시 확인하게 하는 것이다.

또한 수학자의 아이디어를 재발명하는 교실수업을 진행하려는 교사에게 다음과 같은 제언이 도움이 될 것으로 보였다.

첫째, 수업의 도입부분에서, 지도하려는 수학 개념에 대한 학생들의 인식론적 장애를 미리 조사 연구하여 토론 등을 통하여 그 장애를 제거하는 것이 필요하다. 즉, 악기에 사용되는 현을 준비하여 현의 길이에 따른 음의 고저를 교사와 학생이 함께 실험으로 알아보는 것이다.

둘째, 지도하고자 하는 수학적 개념을 발명가가 발명할 당시에 사용했던 아이디어를 수학의 역사에서 찾아서 학생들에게 설명하고 그와 유사한 학생들의 아이디어를 발표하는 과정을 갖는 것이 중요하다. 즉, 현을 사용하는 악기 또는 크기가 다른 종을 이용하거나 물잔을 이용한 악기 등을 사용하여 7음계를 표현하는 과정을 통하여 비와 비례 관념을 다양한 장면에서 경험하도록 하는 것이다.

셋째, 교사에게는 여러 가지 제약이 있겠으나, 어른들의 사고방식에 따라 어른들의 언어로 만들어진 기성수학에 사용된 아이디어를 학생들의 사고방식에 따른 학생들의 언어로 변형한 학교수학으로 전환하려는 끊임없는 시도와 노력이 필요하다고 본다.

References

- Bachelard, G.(2002), The Formation of the Scientific Mind. Clinamen Press. Manchester.
- Boyer, C.(1968). A History of Mathematics, John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Brousseau, G.(1997), Theory of didactical situations in mathematics, Kluwer Academic Pub.
- Brown, S(1996). Biographical Dictionary of Twentieth-Century Philosophers. Routledge. London. 41-42.
- Bruner, J.S.(1960). The process of education. Harvard University Press.
- Chung, C., & Kang, H. (2001). A study for developing and implementing integrated curriculum using project approach in an elementary school setting. The Journal of Curriculum Studies, 19(1), 343-362.
- Dewey, J.(1997). Education and Experience, Touchstone, New York.
- Edwards, P.(1967). Encyclopedia of Philosophy. NY: Macmillan.
- Freudenthal, H.(1973). Mathematics as an Educational Task. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
- Freudenthal, H.(1981). Major Problems of Mathematical Education. Educational Studies in Mathematics, 12, 133-150.
- Freudenthal, H.(1983). Didactical phenomenology of mathematical structures, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
- Freudenthal, H.(1991). Revisiting Mathematical Education. China Lectures: Kluwer Academic Publishers.
- Greeno, J. G. (2006). Learning in activity. In R. K. Sawyer (Ed.), The Cambridge handbook of the learning sciences, 79-96. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jang, H. (2005). The Principle of Clairaut's Geometry. Seoul: Kyongmoonsa.
- Kim, B., & Kim, Y.(2017). A Comparison of effects on precautionary and prescriptive learning to prevent the low math achievement in elementary school. Primary School Subject Teaching and Research, 4(2), 1-20.
- Kim, Y., Whang, W., Lee, J., & An, B. (1998). Diagnosis and Treatment Mathematics. Seoul: Kyongmoonsa.
- Memorandum (1962). On the Mathematics Curriculum of the High School. Mathematical Association of

- America. 69(3), 189-193.
- Michael, K. (1997). The Project Method: Its Vocational Education Origin and International Development. *Journal of Industrial Teacher Education* 3, 59-80.
- Poincare, H. (1946). *Foundations of Science*. NY: Science Press.
- Polya, G.(1957). *How to Solve It*. NJ: Princeton University Press.
- Schoenfeld, H. (1987). Pólya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, 60(5). 283-291.
- Thom, R.(1973). Modern Mathematics: Does it exist? A.G. Horson(ed.). *Developments in Mathematical Education*, 194-209.
- Toeplitz, O.(1963). *The Calculus-A Genetic Approach*, Chicago: The University of Chicago Press.
- Woo, J. (1998). *Educational Foundation of School Mathematics*. Seoul: Seoul National University Press.
- Woo, J. (2000). *Principles and Methods of Teaching and Learning Mathematics*. Seoul: Seoul National University Press.

Appendix

Appendix 1 현장 연구 사례

연구자	병행 적용 방법	효과
최진옥 (2007)	발문학습	창의적 사고, 논리적 사고, 의사결정능력, 비판적 사고 능력 신장
소유미 (2009)	발문학습	수학적 지식의 확실한 이해 및 긍정적인 학습태도
단형진 (2004)	자기주도적 학습지	능동적 활동, 다양한 전략 활용
이지성 (2000)	소집단 토의학습	과제집착력 향상, 흥미유발
김선희 (2012)	발문, 문제해결 경험 상기	유사문제 연상, 문제의 이해능력, 해결 방향 능력 신장
김윤정 (2010)	문제의 이해 단계에 맞는 사고를 하는 활동	문제의 정확한 이해
전은미 (2002)	소리 내어 읽기 활동	문제의 정확한 이해, 학업 성취도 신장

Appendix 2

주제명	악기를 만들어 보아요!	총 차시	5차시
-----	--------------	------	-----

1) 주제 전개 계획

국가수준 교육과정				학교수준 교육과정		
시기	단원	차시	학습 주제	주제	주요 내용	차시
2학기	(음악)- 2-1. 생활 속의 악기 세상	1/2	생활 주변 물건을 이용해 악기를 만들어 연주하기	악기를 만들어 보아요!	□고음과 저음 차이 알아보기 □현악기 속의 수학적 비밀 찾기 □현악기 계획하기	1-2/5 (본시)
	(수학)- 2-2. 비례식과 비례배분		비례식의 성질을 알고 □의 값을 구하기			
	(수학)- 2-6. 여러 가지 문제	7/13	규칙에 따라 선분으로 여러 가지 모양 만들기		□피타고라스의 음계 원리 찾기 □악기 만들기 □악기 수정하기	3-4/5
		9/13	음계에 있는 수학적 원리를 이용하여 펜과			

		이프 만들기			
	10/13	문제의 조건을 바꾸어 문제 만들기		□설명 자료 만들기 □발표 및 전시하기	5/5
제구성 근거					
국가수준 교육과정의 수학과 본 단원인 6학년 2학기 2단원 비례식과 비례배분을 알고 이를 실생활의 문제 해결에 활용하는 능력을 기르고 이를 통해 수학의 유용성을 인식하는데 목표가 있고 이 목표를 도달하기 위해 비례식, 비의 성질, 비례배분을 학습하고, 음악과 본 단원은 생활 주변이나 악기에서 음높이가 차이 나는 원리를 탐구하여 악기 제작을 구상하고 나만의 공기 울림 악기, 줄 울림 악기를 만들어 간단한 악곡을 연주하는데 목표가 있고 이 목표를 도달하기 위해 나만의 악기 만들기 구상 계획하기, 나만의 관악기, 현악기 만들기를 학습하게 구성되었다.					
학교수준 교육과정의 본 주제는 '음계에 있는 수학적 원리를 이용하여 펜과 이프 만들기', '생활 주변 물건을 이용해 악기를 만들어 연주하기'이다. 두 주제의 공통 소재인 '악기'는 학생들이 일상생활에서 쉽게 접하고 있지만 악기 속에 숨어 있는 수학적 원리를 알지 못하므로 비와 비율을 활용한 악기를 제작하도록 하기 위해 통합하여 프로젝트 학습을 하게 된다. 첫번째 단계에서는 학생의 바이올린 연주를 듣고 고음과 저음의 차이를 탐색해 7음계가 나는 원리를 토의하며 현악기의 수학적 비밀을 찾아 주요 음의 길이의 비를 확인한 후 만들 악기를 계획하고, 학습하기 단계에서는 서양음악의 음계를 처음으로 발명한 피타고라스학파의 음계 원리(피타고라스 음계원리: 5도의 길이 정수비 3:2의 비율 2/3)를 찾아 발표하며 그 원리를 활용하여 악기를 만들어 보고, 다지기 단계에서는 악기에 대한 설명 자료를 만들며 그 악기를 발표하여 전시한다.					

2) 주제 학습 과정

본시 주제	현악기 계획하기	차시	1-2/5	배움 목표	현악기를 계획할 수 있다.
배움 자료	바이올린 악기, 현악기 특징 조사 프레젠테이션, 악기 프로젝트 계획서, 활동지, 앱 (strings tuner), 계산기, 자, 두꺼운 도화지, 송곳, 할핀	지원 자료	모둠이름 예시자료, 스마트폰 어플 활용 방법 자료		
배움 활동					
□고음, 저음 차이 알아보기 □현악기 속의 수학적 비밀 찾기 □줄로 7음계 만들기 □현악기 계획하기 □피타고라스의 음계 원리 찾기 □피타고라스의 아이디어 알아보기					
배움 지원					
-현악기 특징을 조사할 때 7음계 소리를 내는 원리를 바탕으로 조사하기 -비의 성질을 이용하여 7음계를 현의 길이 비율로 나타내기 -자신의 만든 7음계의 소리를 확인하기 위한 스마트폰 어플 활용 안내하기					

Appendix 3 상호 평가표

평가내용			평가척도				
영역		기준	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
구상지 (30)	이해도	7음계의 수학 원리를 이용하여 길이 비율에 따른 실제 길이 계산 원리와 개념을 이해 할 수 있다.	5	4	3	2	1
	적절성	표에 기록된 실제 길이 내용이 모두 적절하다.	15	12	9	6	3
	성실성	모든 서식의 내용을 빠짐없이 성실하게 기록하였으며 구상하는 태도가 우수하다.	10	8	6	4	2
완성품 (30)	심미성	악기 외형이 정리가 잘 되어있고 균형감과 색상이 조화롭게 구성되었다.	10	8	6	4	2
	기능성	7음계 소리가 정확하게 연주된다.	10	8	6	4	2
	시간	주어진 시간 내에 완성하였다.	10	8	6	4	2
창의성 (10)	창의성	7음계를 이용한 악기 제작 아이디어에 창의성이 발휘 되었다.	10	8	6	4	2
	문제해결력	피타고라스 음계의 아이디어와 원리의 이해를 바탕으로 끊임없이 탐구하여 해결하였다.	10	8	6	4	2
협동성 (10)	협동성	모둠의 활동에서 구성원을 배려하고 과제 수행을 위해 매우 협동적이다.	10	8	6	4	2
	발표	수행 과정과 결과에 대한 의견을 논리적으로 발표하였다.	10	8	6	4	2
합 계			점				