

An Analysis of Cognitive Demands of Mathematical Tasks in Korea and Japan Elementary School Textbooks in Proportional Reasoning

Ha-Na Park, Jeong-Yee Han, Hae-Rin Yoon, Soo-Yeon Jeong, Doo-Ran Kim,
Kwang-Ho Lee*
Korea National University of Education

<ABSTRACT>

The purpose of this study was to examine and analyze the cognitive demand of the mathematical tasks suggested in the elementary school textbooks in Korea and Japan. In particular, it aimed to reveal the overall picture of the level of cognitive demand of the mathematical tasks in the strand of proportional reasoning in the textbooks. We adopted the framework for mathematical task analysis suggested by Stein & Smith(1998) and analyzed the mathematical tasks accordingly. The findings from the analysis showed that 38.9 percent of the mathematical tasks were at high level and the rest at low level in terms of cognitive demand in Korea. In Japan 18.7 percent of the mathematical tasks were at high level and the rest at low level in terms of cognitive demand. Most of the mathematical tasks in the textbooks were algorithmic and focused on producing correct answers by using procedures in both countries.

Keywords : Proportional reasoning, mathematical tasks, mathematics textbooks, cognitive demands, task analysis

Introduction

교과서는 교육 현장에서 학생과 교사가 자연스럽게 접하는 매체로서 실제 교실 수업에 영향을 준다. 교사는 학교 현장에서 교육과정을 바탕으로 전반적인 수업을 구성하는 중요한 역할을 수행하는데, 이 과정에서 교사는 수업을 위한 교육 자료로써 교과서를 가장 많이 사용한다(Kim, 2012). 또한 Lee & O(2007)은 수학적 과제가 학생들의 의사소통 능력

과도 밀접한 관계가 있다고 하였다. 따라서 교사의 수업 진행과 학생들의 의사소통 능력에 영향을 미치는 교과서에 제시된 수학 과제에 대한 이해가 필요하다.

앞서 서술한대로 교과서 활용의 중요성의 측면에서, 수학 교과서를 구성하고 있는 학습 과제 및 학습 목표 등이 교육과정이 추구하고자 하는 그 방향과 일치하는지 살펴볼 필요가 있다. 특히 비와 비율은 가게에서의 물건 구입, 화폐 단위의 변환, 요리 재료, 자동차의 속력과 연비, 단위 환산, 도형 변환,

* Corresponding author : Kwang-Ho Lee, paransol@knue.ac.kr

Received February 20, 2017; Accepted March 1, 2017; Published March 31, 2017
© 2017. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

음악에서 음표의 길이, 황금비, 환율, 주가 지수, 비율 확률 등 우리 생활과 밀접하게 관련되어 있다. 그러므로 비와 비율 단원의 수학과제는 주변 생활과 연계된 문제 해결을 통해 학생들에게 의미 있는 학습 동기를 제공할 수 있어야 한다(MEST, 2015b). 비와 비율 단원의 이러한 특성은 시대가 요구하는 수학교육의 목표인 생활 주변이나 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 기능과 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 달성하는데 중요한 교과 영역이다. 따라서 수학교육의 궁극적인 목표 달성에 중요한 역할을 담당하고 있는 비와 비율 단원이 교과서 내에서 수학 과제를 통해 그 목표를 달성할 수 있도록 반영되어 있는가에 대한 연구가 필요하다.

한편 일본 교과서는 우리나라 교과서와는 사뭇 다른 비율 및 그와 연결된 개념인 비, 비의 값, 백분율, 비례식을 제시하고 있다(Lee, Kim & Park, 2015). 두 나라에서 비와 비율에 대한 정의가 다른 것처럼 과제의 인지적 노력 수준에도 어떠한 비슷한 점과 차이점이 있는지 비교하는 것도 의미가 있을 것이다. 따라서 우리나라 교과서와 일본 교과서의 과제 수준 비교를 통해 우리나라 교과서 개발에 도움을 줄 수 있는 시사점을 찾고자 한다.

본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따르는 6학년 1학기 4. 비와 비율 단원과 일본의 2008 교육과정에 따른 5학년 2학기 '15. Ratio and Graph' 단원과 6학년 2학기 '11. Ratio and the Application' 단원의 수학 과제 수준을 비교하고자 한다. 이를 위해 구체적인 연구 질문은 다음과 같이 설정하였다.

첫째, Stein et al. (2009)이 제시한 수학 과제 분석틀(Mathematical Task Analysis Guide)을 이용하여 우리나라 초등학교 6학년 1학기 4. 비와 비율 단원과 그와 관련된 일본의 5학년 2학기 15. 비율과 그래프, 6학년 2학기 11. 비율과 적용 단원에 포함된 수학 과제를 분석하였을 때, 과제의 인지적 노력 수준은 어떠한가? 둘째, 두 나라 교과서의 과제를 비교한 결과를 종합하고, 우리나라 수학 교과서 개발에서 참고할 수 있는 시사점은 무엇인가?

Theoretical Background

Ratio & Rate

학생들의 실태조사 결과를 통계 낼 때나 학생들을 평가한 결과를 분석할 때, 그래프를 작성하여 보고서를 쓸 때 등 교사들의 업무에 비와 비율은 많이 이용된다. 일상생활에서도 비와 비율은 많이 사용되고 있다. 예를 들어, 마트에서 가격할인을 보고 실제 가격을 계산할 때나 분유를 타고 이유식을 만드는 등의 육아에도 사용된다. 그런데 Park & Jung(2010)은 실생활에서 비와 비율에 관련된 개념이나 용어를 자주 사용하고 관련 경험을 다양하게 하고 있음에도, 그동안 여러 평가 결과에서 우리나라 학생들은 비와 비율 관련 개념을 제대로 파악하지 못하고 있음이 드러났다고 언급했다. 이에 대한 구체적인 연구로, An & Bang(2008)이 초등학생들의 비와 비율 개념을 바탕으로 한 비례추론 능력 실태 조사에서 전체 34%의 학생들이 오류를 범하고 있다고 밝혔다.

Park & Jung(2010)은 비 개념은 시대에 따라 그 의미가 조금씩 다르고, 학자마다 그 정의가 조금씩 다르므로 비 개념을 명확하게 정의하는 것은 쉽지 않다고 하였다. 그 중 우리나라 지도서에는 1983년 창원사(創元社)에서 발행한 『콘사이스 수학 사전』의 정의에 따라 비와 비율, 비의 값의 수학적 의미가 <Table 1>과 같이 나와 있다(MEST, 2015b).

<Table 1> The meaning of ratio & rate

Ratio	When a and b are two numbers or the same kind of quantities, the ratio of a to b is expressed as a: b, where a is a multiple of b.
Rate	When two or more numbers or quantities represent the relationship of their size, the ratio is written. Let a and b be two numbers or the same kind of quantity, and use fraction a / b to denote how many times a is b. This is called the ratio of a to b. The fraction a / b is called the fraction of the ratio, and this fraction is called the prime of the ratio.
Ratio value	The result of calculating $a \div b$, that is, the value of the fraction is the value of the ratio a: b.

Comparing Korean & Japanese Textbooks

An & Bang(2008)은 ‘비’라는 학습대상은 수나 도형과는 다르게 두 양 또는 두 수를 다루면서도 그것을 하나의 대상으로 파악해야 하는 성질을 가지고 있으므로 초등학생이 학습하기에 어려운 대상이라고 하였으며, 그럼에도 불구하고 교과서에서는 비의 표현 방법과 같은 외형적 특징과 알고리즘을 강조하고 있다고 하였다. 그러므로 교과서가 비의 외형적 특징과 알고리즘만을 강조하고 있으면 교사도 그렇게 가르치는 경향을 보일 것이기 때문에 앞서 언급한 바와 같이 비와 비율 개념 자체가 우리 생활에서 중요할 뿐만 아니라, 이 개념들을 교과서에 잘 다루는 것 또한 중요하다는 점을 이끌어낼 수 있다.

Park & Jung(2010)은 우리나라 교과서 내에서의 비에 대한 설명도 시대에 따라 다르게 나타난다고 하였다. 7차 교육과정에 따른 수학교과서에서는 기준량을 1로 볼 때의 비율을 ‘비의 값’이라고 정의하고, 기준량을 100으로 볼 때의 비율을 ‘백분율’로 정의하면서 기준량에 따라 비율을 서로 다른 것으로 인식하는 오류를 보였으며, 사실 비율은 (비교하는

양) $\div$ (기준량)으로 정의하는 한, 기준량을 무엇으로 보느냐 하는 것은 아무런 의미가 없다고 한다(교육부, 2015b). 2009개정 교육과정에 따른 수학 교과서에서는 ‘비율’과 ‘비의 값’을 같은 것으로 정의하고 있다.

Kim(2015)는 그의 연구에서 우리나라에서는 ‘비’, ‘비율’, ‘비의 값’의 관계가 논쟁을 불러왔다고 하였다. 반면, 미국에서는 ‘ratio’와 ‘rate’의 관계가 논쟁을 부른다고 하였다. 그는 미국에서는 ‘rate’를 ‘ratio’와 동일한 개념으로 보는 관점, 서로 다른 유형의 비로 보는 관점, ‘rate’를 ‘ratio’의 하위 개념으로 보는 관점 등의 3가지 관점이 있다고 정리했으며, 이는 Izsak, Tunc-Pekkan(2008)이 그들의 연구에서 ‘비’를 같은 유형의 크기 비교, 두 개의 양에 대한 비교, 비율의 의미로 나누어 정의한 것과 상통한다.

이에 따라 우리나라 교과서와 미국 외의 다른 나라 교과서 또한 비에 대한 정의 차이가 있을 수 있음을 예측할 수 있다. 실제로, Lee, Kim & Park(2015)은 우리나라 교과서에서는 비율을 외적 비율과 내적 비율로 명시적으로 구분하지 않는 것에 비해 일본 교과서에서는 비율을 외적 비율과 내적 비율로 명시적으로 구분한다고 밝혔고, 일본 교과서에서는 비에서 전항을 후항으로 나눈 몫을 비의 값으로 정의하며, 명시적으로는 비율과 비의 값을 동의어로 사용하지 않는다고 밝혔다. 이렇듯 비에 대한 정의에 차이가 있는 일본 교과서와 우리나라 교과서의 비에 관한 단원을 비교하는 것이 의미가 있다고 본다.

우리나라와 다른 나라의 교과서나 교육과정을 비교하는 연구는 활발히 이루어졌다(Kim & Bak, 2010; Park & Jung, 2010; Bang et al., 2015; Park, 2015). 그 중 비에 관한 단원을 우리나라 교과서와 비교한 연구는 미국과 싱가포르 교과서를 대상으로 한 경우가 있었고(Kim & Bak, 2010; Park & Jung, 2010), 일본 교과서와 우리나라 교과서를 비교한 연구는 각 및 각도 지도 내용에 대해 비교한 경우와(Park, 2015), 앞서 말한 Lee, Kim & Park(2015)이 우리나라와 일본의 초등학교 수학 교과서에 제시된 비율의 정의를 비교 연구한 것이 있었다. 하지만 An & Park(2008)이 교과서가 비에 관해서 외형적

특징과 알고리즘만을 강조한다고 문제점을 지적한 것을 해결하려면, 이와 연관된 인지적 수준에 따른 교과서 분석이 필요하므로 우리나라와 일본 교과서의 비에 관한 단원을 비와 비율의 정의의 차이점을 고려하되, 인지적 수준의 관점에 더욱 초점을 맞춰서 비교하려 한다.

우리나라는 2009년 개정 교육과정을 따르고 있는 현행 교과서를 대상으로 하고, 일본은 2008년 개정 초등학교 수학과 교육과정에 따른 현행 교과서를 대상으로 비교하고자 한다. 이를 비교하기에 앞서 각 국가수준 교육과정의 비에 관한 내용 성취기준을 비교해 보면 <Table 2>와 같다.

‘비’, ‘비율’, ‘비의 값’을 기준으로 학년별 내용의 구성을 살펴보자면 우리나라 교과서에는 6학년 때 이 3가지 내용이 다 들어가는 반면, 일본 교과서에서는 5학년과 6학년으로 나누어서 등장한다.

<Table 2> The achievement standard of ratio in Korea and Japan (MEST, 2011; 文部科學省, 2010)

6 - 1	
Korea	(1) By comparing the magnitudes of the two quantities, we can understand the concept of ratio and express the relationship as a ratio. (2) You can understand the ratios, and the ratios can be expressed as fractions, decimals, and percentages.
5 - 2	
Japan	(1) Use the table to examine the relationship between two quantities that change together. (2) The understanding of the equation expressing the relation of quantity is improved, and attention can be paid to the manner in which the two quantities correspond and change with respect to the relationship expressed by the simple expression. (3) Make the percentage understandable.
6 - 2	
	(1) Make sure the ratios understandable.

Mathematical task analysis guide & types

Lee & Lee(2015)는 수학적 과제는 학생들이 수학적으로 사고할 수 있도록 수학적 문제 해결을 제공하는 것이라고 하였으며, Gwon(2015)은 성공적인 수학 수업을 위해서 교사는 효과적인 수학 과제를 준비해야 하며, 학습 과제의 준비를 위해 교사가 선택할 수 있는 방법 중 하나가 교과서와 같이 이미 만들어진 자료를 활용하는 것이라고 하였다. 그런데 앞서 언급한 바와 같이 An & Bang(2008)은 교과서가 비에 관해서 외형적 특징과 알고리즘만을 강조한다고 문제점을 지적하였고, 이는 Stein et al. (2009)의 과제 분석틀(Mathematical Task Analysis Guide)과 연관된다. Stein et al. (2009)은 더 높은 인지적 수준의 과제 해결에는 복잡하고 비알고리즘적인 사고가 필요하며, 학생들에게 수학적 개념, 과정, 관계의 본질을 탐구하고 이해하도록 요구한다고 하였기 때문이다. Gwon(2015)은 초등예비교사가 수학수업에 활용한 수학 과제의 인지적 요구 수준을 분석한 결과, 낮은 수준의 과제가 74%를 차지했으며 높은 수준의 과제는 26%였다고 하였다. Stein & Smith (1998)의 분석틀을 사용한 그의 연구에서는, 학습자에게 보다 높은 인지적 수준을 요구하는 수학 과제를 제공하는 것이 필요하다고 주장하였다.

Stein et al. (2009)은 인지적 수준에 따라 수학적 과제를 암기형 과제(Memorization, 이하 M), 연계 없는 절차형 과제(Procedures without connections, 이하 PNC), 연계 있는 절차형 과제(Procedures with connections, 이하 PWC), 수학 행하기 과제(Doing mathematics, 이하 DM)로 <Table 3>과 같이 나누었다. 선행 연구에 따르면 Kim & Bang(2005)은 수학 교수·학습 과정에서 과제의 인지적 수준을 Henningsen & Stein (1997)의 분석틀을 활용하여 분석했고, 앞으로 이 연구에서 사용할 Stein et al. (2009)의 분석틀은 수학 과제를 분석하는 분석 지침으로서 근래에도 왕성히 사용되고 있다(Kim & Kim, 2013; Gwon & Kim, 2013; Hwang & Park, 2013; Lee & Lee, 2015; Gu & Lee, 2015).

<Table 3> Analysis protocol of the tasks(Stein et al., 2009)

Lower-levels Demands	Higher-level Demands
Memorization Tasks (M) • Involves either producing previously learned facts, rules, formulae, or definitions OR committing facts, rules, formulae, or definitions to memory. • Cannot be solved using procedures because a procedure does not exist or because the time frame in which the task is being completed is too short to use a procedure. • Are not ambiguous - such tasks involve exact reproduction of previously seen material and what is to be reproduced is clearly and directly stated. • Have no connection to the concepts or meaning that underlie the facts, rules, formulae, or definitions being learned or reproduced.	Procedures With Connections Tasks (PWC) • Focus students' attention on the use of procedures for the purpose of developing deeper levels of understanding of mathematical concepts and ideas. • Suggest pathways to follow (explicitly or implicitly) that are broad general procedures that have close connections to underlying conceptual ideas as opposed to narrow algorithms that are opaque with respect to underlying concepts. • Usually are represented in multiple ways (e.g., visual diagrams, manipulatives, symbols, problem situations). Making connections among multiple representations helps to develop meaning. • Require some degree of cognitive effort. Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly. Students need to engage with the conceptual ideas that underlie the procedures in order to successfully complete the task and develop understanding.
Procedures Without Connections Tasks (PNC) • Are algorithmic. Use of the procedure is either specifically called for or its use is evident based on prior instruction, experience, or placement of the task. • Require limited cognitive demand for successful completion. There is little ambiguity about what needs to be done and how to do it. • Have no connection to the concepts or meaning that underlie the procedure being used. • Are focused on producing correct answers rather than developing mathematical understanding. • Require no explanations, or explanations that focus solely on describing the procedure that was used.	Doing Mathematics Tasks (DM) • Requires complex and non-algorithmic thinking (i.e., there is not a predictable, well-rehearsed approach or pathway explicitly suggested by the task, task instructions, or a worked-out example). • Requires students to explore and to understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships. • Demands self-monitoring or self-regulation of one's own cognitive processes. • Requires students to access relevant knowledge and experiences and make appropriate use of them in working through the task. • Requires students to analyze the task and actively examine task constraints that may limit possible solution strategies and solutions. • Requires considerable cognitive effort and may involve some level of anxiety for the student due to the unpredictable nature of the solution process required.

Method & Procedure

Research method

Stein et al. (2009)이 제시한 수학 과제 분석틀 (Mathematical Task Analysis Guide)을 이용하여 우리나라 초등학교 6학년 1학기 4. 비와 비율 단원과 일본의 5학년 2학기 15. 비율과 그래프, 6학년 2학기 11. 비율과 적용 단원에 포함된 수학 과제를 분석하였을 때, 과제의 인지적 노력 수준은 어떠한지 살펴보기 위해서 교과서 내용 국제 비교 연구 방법을 적용하고자 한다.

Participants

본 연구에서 비교 분석하고자 하는 교과서는 우리나라의 경우, 2009 개정 교육과정의 반영된 것으로

2016년 현재 현장에서 사용되고 있는 수학교과서이다.

일본의 교과서는 2008년 3월 28일 개정 고시된 일본의 소학교 학습지도요령에 따라 2009년 4월 1일부터 개정되어 2011년 4월 1일부터 전면적으로 실시되고 있는 새로운 교육과정의 검인정 도서 중에서 Gakkoh Tosho(학교도서주식회사)에서 출판된 영문판 교과서를 대상으로 비교, 분석하였다. 우리나라 교과서의 6학년 1학기 ‘4. 비와 비율’ 단원에 해당하는 내용을 5학년 2학기, 6학년 2학기 일본 교과서에서 찾아 연관 지었고, 그 결과는 <Table 4>와 같다. 또한 우리나라와 일본 교과서의 과제 분석을 위하여 다음과 같은 기준을 세워 적용하기로 한다.

첫째, 우리나라와 일본 교과서의 단원 도입 부분은 과제로 간주하지 않는다. 즉, 각 교과서 모두 현재 단원에서 학습한 수학적 개념을 묻는 과제만을 연구 과제만으로 간주한다. 따라서 1차시인 ‘비

<Table 4> The part of tasks on rate and ratio on two countries' textbooks

Korean Textbook (6-1. 4. Ratio and Rate)		Japanese Textbook (Gakkoh Tosho)	
Period	Subjective	Textbook	Lesson title and page
1	Learn when rate and ratio are used	5-2	15. Ratio and Graph (p. 81~83)
2~3	Comparing two sizes of numbers with subtraction and division		
4	Comparing two numbers and expressing them as a ratio	6-2	11. Ratio and Application (p. 8)
5	Understanding ratios and expressing ratios in fractions and decimals	5-2	15. Ratio and Graph (p. 84~87)
6	Learn percent	6-2	11. Ratio and Application (p. 9)
7	Learn about the possibility of an incident	5-2	15. Ratio and Graph (p. 88~90)
8	Find the compared quantity with the rate and the basic quantity		
9	Obtaining a reference amount in terms of a ratio	5-2	15. Ratio and Graph (p. 93)
10	Learn when rate is used (speed)		
11	Learn when rate is used (population density)		
12	Learn when rate is used (solution concentration)		
13	Review	5-2	15. Ratio and Graph (p. 100)
14	Problem solving- Comparing camping satisfaction	5-2	15. Ratio and Graph (p.101~102)
15	Experience - Solving our village problem		

와 비율이 사용되는 경우 알아보기'와 그에 해당하는 일본 교과서 15단원의 80~93쪽의 과제는 분석에서 제외한다.

둘째, 하나의 문제가 여러 개의 소 문제로 구성되는 경우에는 문제의 성격에 따라서 한 가지 혹은 그 이상으로 과제를 분류한다. 예를 들어, 하나의 활동 아래에 여러 개의 소 문제들이 있는 경우 소 문제끼리 관련이 있을 경우에는 하나의 과제로 분류한다. 그러나 소 문제끼리 관련이 없는 유형일 경우에는 두 가지 이상의 문제로 간주한다.

셋째, 우리나라 교과서를 기준으로 하여, 그에 해당하는 일본 교과서의 부분을 순서대로 비교하고자 한다. 우리나라 교과서에는 제시되어 있지만, 일본 교과서에는 없는 2~3, 7, 10~12차시는 우리나라 교과서 과제만 분석하도록 한다.

Results

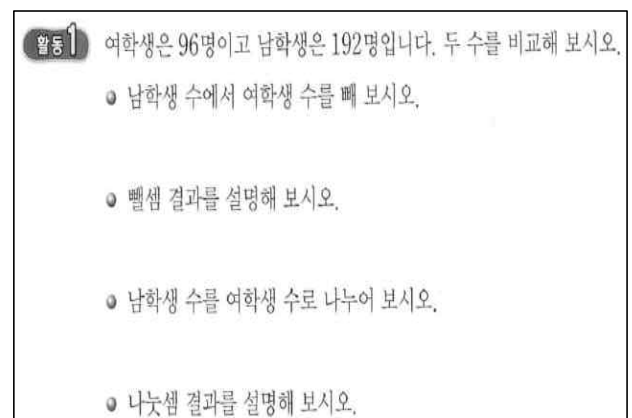
2nd lesson. Able to compare two numbers(1)

<Table 5> The analysis of tasks in 'The compare of two numbers(1)'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		4 (80%)	1 (20%)		5 (100%)

우리나라 교과서 2차시에서는 두 수를 뺄셈과 나눗셈으로 비교하는 것을 학습한다. 학습목표는 두 수를 여러 가지 방법으로 비교하는 것이다. 이를 위해 교과서에서는 4개의 활동과 1개의 마무리 문제를 제시하고 있다. 활동1에서는 야영장에 참가한 여학생의 수와 남학생의 수를 제시하고 두 수를 비교해 보도록 하고 있다. 또한 활동1의 하위에 4개의 소문제를 제시하여 두 수의 비교 방법을 간접적으로 제시한다. 소문제 1의 경우 남학생 수에서 여학생 수를 빼게 하고, 소문제 2에서 뺄셈의 결과를 설명하게 한다. 소문제 3의 경우 남학생 수를 여학생 수로 나누게 하고,

소문제 4에서 나눗셈의 결과를 설명하게 한다. 활동에 제시된 문제는 어느 정도의 인지적 노력을 필요로 하며 일반적인 절차를 따를 수는 있지만 아무 생각 없이 따라 할 수 없으므로 PWC과제라고 볼 수 있다. 하지만 해당 활동의 하위 요소인 소문제들에서 활동을 해결할 수 있는 방법을 명확히 제시하고 있어 이는 알고리즘적이며 따라서 활동의 소 문제들이 이 활동을 PNC 과제로 만들었다. 즉, 활동 1은 PNC 과제로 분류된다. 이러한 방법은 알고리즘적이고 수학적 이해를 개발하는 것 대신에 정답을 산출하는 것에 초점을 둔다는 점에서 PNC 과제라고 할 수 있다. 뒤이어 제시되는 활동들과 마무리 문제 역시 수학적 개념과 아이디어에 대한 더 깊은 수준의 이해를 개발할 수 있게 하기 보다는 절차 수행으로 정답을 산출하는 것에 초점을 두고 있으므로 PNC 과제로 분류된다.



[Figure 1] 'The compare of two numbers(1)' unit's PNC task on Korean textbook

3rd Lesson. Able to compare two numbers

<Table 6> The analysis of tasks in 'The compare of two numbers(2)'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		3 (75%)	1 (25%)		4 (100%)

우리나라 교과서 3차시에서는 두 수의 크기를 나눗셈으로 비교하게 하며 변하는 두수의 관계를 알아보는 것이다. 학습목표는 변하는 두 수를 나눗셈의 방법으로 비교하는 것이다. 이를 위해 교과서에서는 3개의 활동과 1개의 마무리 문제를 제시하고 있다.

생각 열기에서 남학생의 수와 여학생의 수를 제시하고 비교해 보도록 한다. 그 후 활동 1에서 남학생 수와 여학생 수를 나눗셈으로 비교해 보도록 한 후, 활동 2에서는 모둠 수에 따른 남학생의 수와 여학생의 수를 표로 나타내도록 한 후 나눗셈으로 비교하고 두 수 사이의 관계를 이야기하도록 한다. 활동 3의 경우에는 문제의 소재만 바뀌었을 뿐 비슷하게 문제가 진행된다. 이러한 과제들은 수학적 개념과 연결되어 있지만 이미 활동 내의 소문제에서 해결 절차를 모두 제시하여 학생에게 스스로 수학적 개념과 연결하는 기회를 제공하지 않는다. 따라서 사고와 인식의 요구가 제한적이며 수학적인 이해의 발전보다는 옳은 답을 찾는 데에 초점이 맞춰져 있으므로 PNC로 분류하였다.

활동 2 표를 만들어 남학생 수와 여학생 수를 비교해 보시오.

- 모둠 수에 따른 남학생 수와 여학생 수를 비교하려고 합니다. 표를 완성 하시오.

모둠 수	1	2	3	4	5	6
남학생 수	4					
여학생 수	2					

- 남학생 수와 여학생 수를 나눗셈으로 비교해 보시오.
- 남학생 수와 여학생 수 사이의 관계를 이야기해 보시오.
- 여러 모둠이 모여 있을 때 남학생이 48명이면 여학생은 몇 명인지 설명해 보시오.

[Figure 2] 'The compare of two numbers(2)' unit's PNC task on Korean textbook

그러나 마무리 문제의 경우에는 문제에 내재된 수학적 개념 아이디어와 절차가 연결되어 있어 학생들에게 어느 정도의 인지적 노력을 요구하는 문제이므로 PWC 과제로 분류하였다.

마무리 여학생 6명, 남학생 4명으로 한 모둠을 만들었습니다. 다섯 모둠이 모였을 때 여학생 수와 남학생 수를 각각 구하고 두 수 사이의 관계를 이야기해 보시오.

[Figure 3] 'The compare of two numbers(2)' unit's PWC task on Korean textbook

4th Lesson. Able to understand Ratio

<Table 7> The analysis of tasks in 'Ratio'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea	1 (25%)	1 (25%)	2 (50%)		4 (100%)
Japan		4 (80%)	1 (20%)		5 (100%)

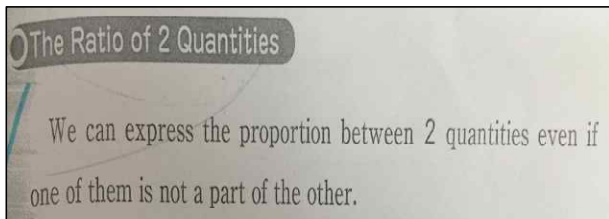
단원 구성상의 특이점으로, 이론적 배경에서 밝힌 바와 같이 일본 교과서에서는 비율을 외적 비율과 내적 비율로 명시적으로 구분하므로 2개의 양의 비를 같은 양의 비와 따로 제시하였다. 분석결과를 살펴보면, 우리나라 교과서에는 낮은 수준의 과제와 높은 수준의 과제가 각각 50%씩 있었고, 일본 교과서에는 PWC 과제보다 PNC 과제가 4배 더 많았다. 이로써 이 차시에서의 PWC 과제는 우리나라 교과서에 일본 교과서에서 보다 더 많은 비율로 있다는 점을 알 수 있다.

우리나라 교과서에서의 과제 중, 두 수를 비교하여 표에 답을 기입한 후 양을 비교하는 방법을 학생 스스로 생각해보기 하는 과제는 아무 생각 없이 일반적인 절차를 따르는 수준이 아니라 어느 정도의 인지적 노력이 요구되기에 PWC 과제로 분류하였다. 이와 비슷하게, 일본교과서에서도 답을 생각하는 동시에 비를 표현하는 방법을 학생 스스로 찾아보게 하는 과제가 있었으므로 이 또한 PWC 과제로 분류하였다.

우리나라 교과서와 일본 교과서 모두, 비의 개념을 익힌 것을 토대로 문장제에 주어진 상황과 조건에 맞는 비를 써 넣는 과제가 있었으며, 이들을 PNC 과제로 분류하였다.

우리나라 교과서의 다른 하나의 PWC 과제는 주어진 표를 해석하여 비를 만들어 비를 포함한 문장으로 표현하는 과제로서, 비의 개념과 표에 주어진 수를 연결해야 풀 수 있는 과제이다.

우리나라 교과서에서 발견된 M 과제는 비를 읽는 법을 배우고 나서 주어진 비를 읽는 문제로, 이전에 학습한 정의를 재생하는 수준이었다.



[Figure 4] 'The Ratio of 2 quantities' unit's on Japanese textbook

5th Lesson. Able to understand Rate

<Table 8> The analysis of tasks in 'Rate'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		1 (33.3%)	2 (66.7%)		3 (100%)
Japan		9 (81.8%)	2 (18.2%)		11 (100%)

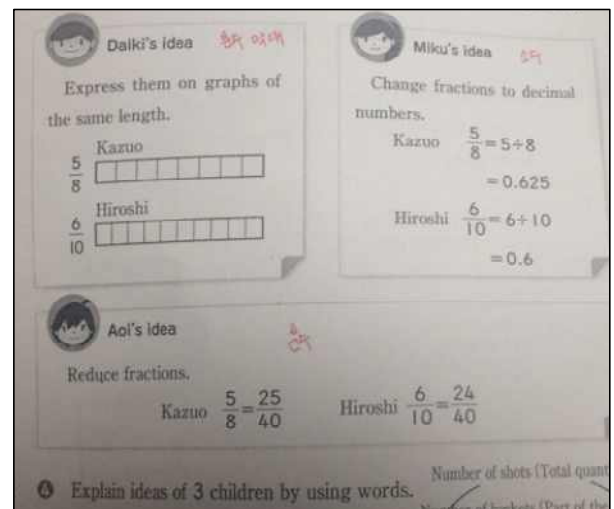
비율 이해하기를 목표로 하는 이 차시는 우리나라 교과서와 일본 교과서 모두 비와 비율이 생활 속에서 사용되는 경우를 알아본 후에 등장한다. 그리고 이론적 배경에서 밝힌 바와 같이 두 교과서의 비의 값의 정의에 차이가 있으므로, 우리나라 교과서에서는 6학년 1학기에 비율과 비의 값을 동일한 의미로 같이 설명하는 반면, 일본 교과서에서는 비율을 5학년 2학기에 설명하고 나서 비의 값을 6학년 2학기에 따로 비에서 전향을 후향으로 나눈 몫으로 정의한다.

우리나라 교과서에서의 비를 하나의 수로 나타내는 방법을 이야기 해보는 과제, 비율을 비교하고 알게 된 것을 이야기 해보는 과제는 다양한 방식으로

표현될 수 있으므로 PWC 과제로 분류했다.

일본교과서에는 PNC 과제의 비율이 81.8%로 높았으며, 일본교과서와 우리나라 교과서에 나와 있는 PNC 과제 모두는 비율을 분수나 소수로 나타내거나 비의 값을 구하는 등의 과제였다.

일본교과서에서의 비의 문제 상황을 바탕으로 이를 분수로 나타내는 방법을 생각해 보는 과제, 교과서에 제시된 세 명의 학생들의 농구 경기 결과를 비교하는 방법을 이해하고 자신의 말로 설명하는 과제는 비율에 대한 깊은 수준의 이해를 발달시키기 위한 목적으로 비율에 대한 지식을 활용하므로 PWC 과제로 분류하였다.



[Figure 5] 'The rate' unit's PWC task on Japanese textbook

6th Lesson. Able to understand Percent

<Table 9> The analysis of tasks in 'Percentage'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		3 (100%)			3 (100%)
Japan		3 (100%)			3 (100%)

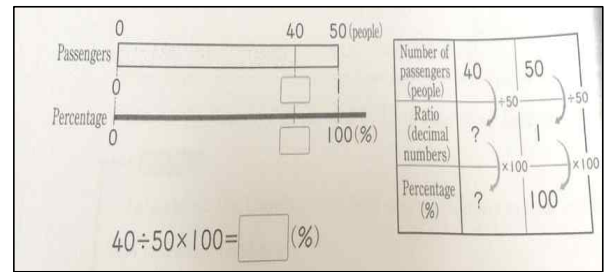
우리나라 교과서 6차시에서는 백분율을 학습한다. 학습목표는 백분율의 정의를 알고 백분율을 분수와 소수로, 분수와 소수를 백분율로 표현하는 것이다. 이를 위해 교과서에서는 3문제를 제시하고 있다. 활동1에서는 전 차시에서 학습한 내용을 토대로 하이킹에 참가한 학생 수에 대한 완주한 학생 수의 비율을 분수로 표현해 보고 그 비율을 분모가 100인 동치 분수로 다시 표현해 보게 한다. 그 후 이를 소수로 나타내게 하고 그 수에 100을 곱하여 100명당 완주하는 학생의 수를 구하도록 하고 있다. 이러한 방법은 알고리즘적이고 수학적 이해를 개발하는 것 대신에 정답을 산출하는 것에 초점을 둔다는 점에서 PNC 과제라고 할 수 있다. 활동2와 마무리 문제 역시 수학적 개념과 아이디어에 대한 더 깊은 수준의 이해를 개발할 수 있게 하기 보다는 절차 수행으로 정답을 산출하는 것에 초점을 두고 있으므로 PNC 과제라고 해석된다.

일본 교과서에서도 백분율 차시에 3문제를 제시하고 있다. 일본 교과서의 3문제 역시 우리나라와 같은 이유로 PNC 과제라고 해석된다. 과제의 인지적 수준은 비슷하지만 우리나라와의 차이점은 길이 모델을 제시하여 백분율을 시각화한다는 것(활동1)과 100%가 넘는 백분율(120%)을 제시하여 백분율의 개념을 확장한다는 것(활동3)이다.

활동 1 하이킹에 참가한 학생 수에 대한 완주한 학생 수의 비율을 알아보시오.

- 비율을 분수로 나타내어 보시오. $\frac{36}{50} (= \frac{18}{25})$
- 비율을 분모가 100인 분수로 나타내어 보시오. $\frac{72}{100}$
- 비율을 소수로 나타내어 보시오. 0.72
- 소수로 나타낸 비율에 100을 곱해 보시오. 72
- 하이킹에 100명이 참가할 때 완주하는 학생은 몇 명이라고 생각합니까? 72명

[Figure 6] ‘The Percentage’ unit’s PNC task on Korean textbook



[Figure 7] ‘The Percentage’ unit’s PNC task on Japanese textbook

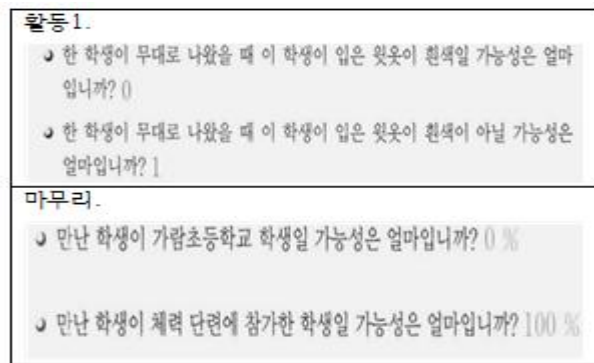
7th Lesson. Able to understand the possibility of event

<Table 10> The analysis of tasks in ‘Possibility’

Level	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		1 (33.3%)	2 (66.6%)		3 (100%)

우리나라 교과서 7차시에서는 사건이 일어날 가능성을 학습한다. 2009 개정 교육과정에서 ‘확률’이라는 용어는 중학교에서 사용하도록 하였기 때문에 같은 의미지만 ‘사건이 일어날 가능성’이라는 용어를 사용한다. 교과서에서는 사건이 일어날 가능성을 비율, 백분율로 표현해 보는 활동으로 3문제를 제시하고 있다. 비율, 백분율이 사건이 일어날 가능성이 된다는 단순한 문제 패턴은 학생들에게 제한된 인지적 수준만을 요구하기에 PNC 과제로 해석될 수 있다. 그러나 그럼에도 불구하고 연구자가 두 문제를 PWC로 분류한 이유는 두 문제가 확률의 0(0%)과 1(100%)의 개념을 제시하며 수학적 개념과 아이디어에 대해 더 깊은 수준의 이해를 개발하기 위한 목적을 지니고 있기 때문이다.

일본 교과서에서는 초등학교 때 확률의 개념을 명시적으로 다루지 않는다.



[Figure 8] 'The Possibility' unit's PWC task on Korean textbook

8th ~ 9th Lesson. Able to get comparing quantity and reference quantity

우리나라와 일본 교과서에서는 비와 비율, 백분율을 학습한 후, 주어진 비율과 기준량으로 비교하는 양 구하기, 주어진 비율과 비교하는 양으로 기준량 구하기를 학습 목표로 하는 차시가 구성되어 있다.

두 차시의 분석 결과를 살펴보면 <Table 11>, <Table 12>와 같다. 두 차시에서 모두 PNC 과제가 주를 이루고 있으며, 우리나라 교과서에서 PWC 과제가 각 차시 당 한 문제씩 제시되어 있다. 두 나라 교과서의 첫 번째 문제에서 그 차이를 찾을 수 있는데, 우리나라 교과서에서는 문제 해결을 위한 단계별 절차 제시 후, 마지막 소문제에서 비율과 기준량(비교하는 양)을 알 때 비교하는 양(기준량)을 구하는 방법에 대해 이야기 해보게 함으로써 학생들이 수학적 개념에 대해 자신이 알고 있는 것을 정리하여 표현하게 한다. 따라서 어느 정도 인지적 수준이 필요하다고 생각되며, 이를 PWC 과제로 분류하였다.

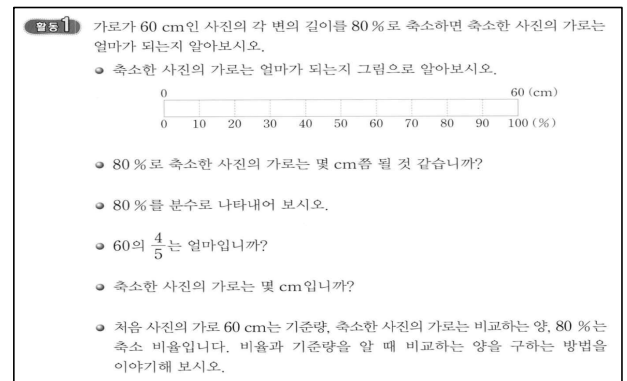
<Table 11> The analysis of tasks in 'Find the amount to compare'

Level	Low Level		High Level		Total
Type	M	PNC	PWC	DM	
Textbook					
Korea		3 (75%)	1 (25%)		4 (100%)
Japan		5 (100%)			5 (100%)

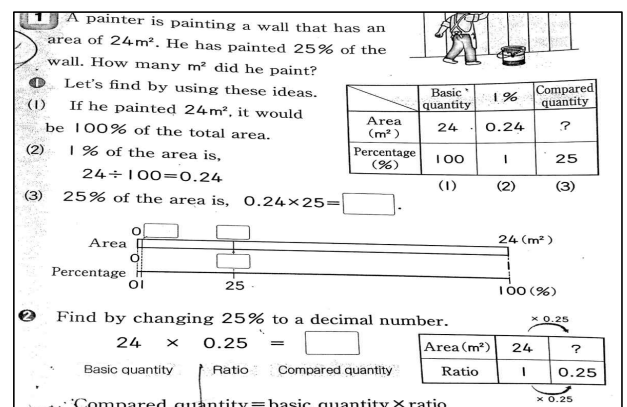
<Table 12> The analysis of tasks in 'Find the standard amount'

Level	Low Level		High Level		Total
Type	M	PNC	PWC	DM	
Textbook					
Korea		3 (75%)	1 (25%)		4 (100%)
Japan		3 (100%)			3 (100%)

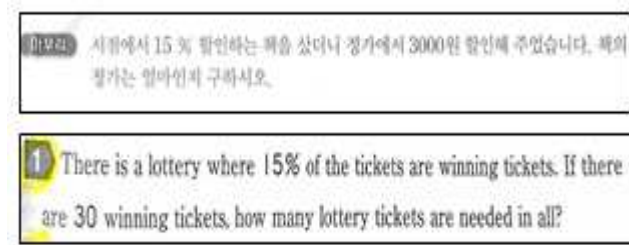
일본 교과서에서도 문제 해결을 위한 절차를 제시하고 있지만, 그림 2와 같이 구체적인 계산방법까지 제시하고 있으며, 학생들은 빈칸에 답을 적어 넣기 위해 계산만 하면 되기 때문에 높은 인지적 수준이 요구되지 않는다. 따라서 이를 PNC 과제로 분류하였다.



[Figure 9] 'Find the standard amount' unit's PWC task on Korean textbook



[Figure 10] 'Find the amount to compare' unit's PNC task on Japanese textbook



[Figure 11] 'Find the standard amount' unit's PNC task on two countries

이 외에, 한국 교과서와 일본 교과서에서 제시된 과제들은 [Figure 11]와 같이 학습한 절차와 계산 방법을 적용하여 해결하는 문제이기 때문에 모두 PNC 과제로 분류하였다.

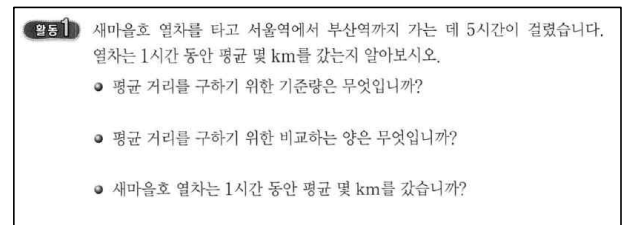
10th~12th Lesson. Able to understand the case of using rate.

<Table 13> The analysis of tasks in 'Case of using rate'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		5 (45%)	6 (55%)		11 (100%)

위의 표는 우리나라 교과서의 10~12차시에 제시된 과제를 높은 수준의 과제와 낮은 수준의 과제로 구분하여 각 유형별로 나타낸 결과로서 전체 11개의 과제 중 6개가 높은 수준으로 나타났다. 반면 낮은 수준의 인지적 노력이 요구되는 낮은 수준의 과제는 전체 11개의 과제 중 5개로 나타났다. 우리나라 교과서를 유형별로 살펴보면, PNC 과제는 45%로 과제수준의 4가지 유형 중 다소 높게 나타났다.

[Figure 12]는 우리나라 교과서에서 포함된 PNC 과제의 특징을 잘 보여주는 대표적인 문제이다. 이 PNC 과제는 낮은 수준에 포함되는 과제로, 45%로 분석된 낮은 수준의 과제 중 가장 높은 비율을 차지하였다.

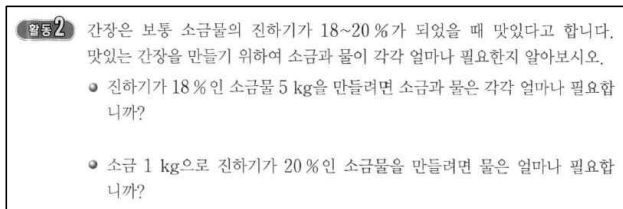


[Figure 12] 'Case of using rate' unit's PNC task on Korean textbook

PNC 과제는 수학적 이해를 발달시키는 것 대신에 정확한 정답을 산출하는 것에 초점을 둔다(Stein et al., 2009). 특히 PNC 과제로 분석한 그림1의 수학 과제는 속력 공식 대입을 통한 단순한 계산과 예제 내용을 그대로 따라하는 등의 방법으로 문제를 해결하도록 제시되어 있었다. 10~12차시에선, 많은 과제가 단순 계산 중심의 PNC 과제인 것으로 분석되었다.

높은 수준 과제의 분석 결과를 보면, PWC 과제는 55%로 과제 수준의 4가지 유형 중 다소 높게 나타났다. 10~12차시의 과제 유형은 전반적으로 낮은 수준과 높은 수준이 상대적으로 유사하게 분포되어 있었다. [Figure 13]의 PWC 과제는 높은 수준에 포함되는 과제로, 55%로 분석된 높은 수준의 과제 중 가장 높은 비율을 차지하였다. PWC 과제는 수학적 개념과 아이디어에 대한 깊은 수준의 이해를 발달시키기 위한 목적으로 절차를 활용하며 다양한 방식으로 표현할 수 있는 능력을 기르는데 도움을 준다(Stein et al., 2009). 특히, PWC 과제로 분석한 [Figure 13]의 수학과제는 단순히 용액의 진하기 공식 대입을 통하여 정답을 구하는 것에 목적을 두는 것이 아니라 용액의 진하기란 개념을 다양한 방식으로 수학적 개념과 아이디어와 연관하여 표현할 수 있는 능력을 기를 수 있도록 한다. 이 10~12차시에서 공통적으로 보인 PWC 과제의 특징은 개념을 활용하여 풀이하는 데에만 그치지 않고 더 나아가 기초 개념의 수학적 의미를 확인하고 이해할 수 있다는 것에 큰 의미를 갖는다.

10~12차시의 인지적 노력수준에 따른 과제 분석 결과를 종합해 볼 때, PNC 과제와 PWC 과제는 한 쪽으로 편중되어 분포되어 있는 것이 아니라 전반적으로 골고루 분포되어 있음을 알 수 있다.



[Figure 13] 'Case of using rate' unit's PWC task on Korean textbook

13th Lesson. Review

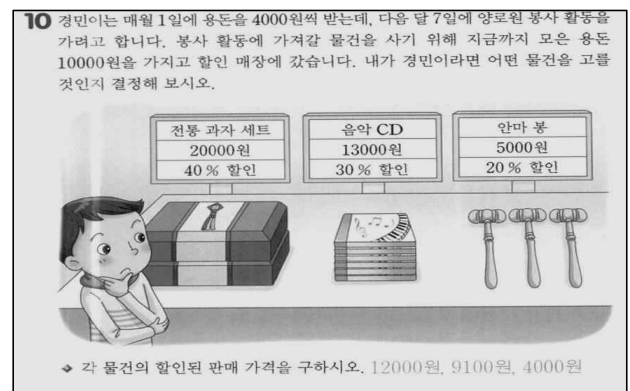
<Table 14> The analysis of tasks in 'Unit Evaluation'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea	1 (9.1%)	6 (54.5%)	4 (36.4%)		11 (100%)
Japan	2 (40%)	3 (60%)			5 (100%)

‘공부를 잘했는지 알아보시다’의 11문제는 각 차시별 학습내용을 반영하면서 ‘비와 비율’ 단원의 학습을 평가하고 피드백하는 역할을 한다. 11문제의 분석 결과는 PNC 과제가 54.5%로 절반 이상을 차지했으며 그 다음이 PWC 과제 36.4%, M 과제 9.1% 순이었다.

M 과제에 해당하는 문제는 1번으로 두 비를 읽어보는 재생 문제이다. PNC 과제에 해당하는 문제들은 3번, 5번, 6번, 7번, 8번, 11번의 총 6문제이다. 이들 문제 유형의 특징은 해결 방법에 대한 인지적 노력과 모호함이 거의 존재하지 않으며 알고리즘적이라는 것이다. 표를 보고 백분율을 구하거나 속력, 인구밀도 및 조건을 활용하여 사건이 일어날 가능성을 계산하는 단순 공식 적용의 문제가 이에 해당한다. PWC 과제에 해당하는 문제들은 2번, 4번, 9번, 10의 총 4문제이다. 이들 문제 유형의 특징은 문제에 내재된 수학적 개념 아이디어와 절차가 연결되어 있어 학생들에게 어느 정도의 인지적 노력을 요구한다는 것이다. 이와 같은 문제를 다룰 때 학생들은 공식을 활용할 수 있지만 아무 생각 없이 공식을 적용할 수는 없다. 주어진 표를 보고 물체의 길이에 대한 그림자의 길이의 비율을 구하여 구

하고자 하는 물체들의 그림자 길이를 찾아내는 것, 농구공 던지기에 대한 3명의 성공률을 백분율, 분수 또는 소수로 표현 방식을 통일하여 비교하고 누가 이길지 그 이유를 설명하는 것, 만화를 통해서 자동차 연비의 개념을 스스로 파악하고 합리적인 선택을 해보는 것, 3가지 물건의 할인된 판매 가격을 구하고 합리적인 선택을 해보는 것이 이에 해당한다. 특히 [Figure 14]의 10번 문제는 학생들이 할인율을 보고 ‘할인된 금액’을 구하는 것이 아니라 ‘할인된 판매 가격’을 구해야 한다는 점에서 학생들의 개념 이해와 어느 정도의 인지적 노력이 필요하다.

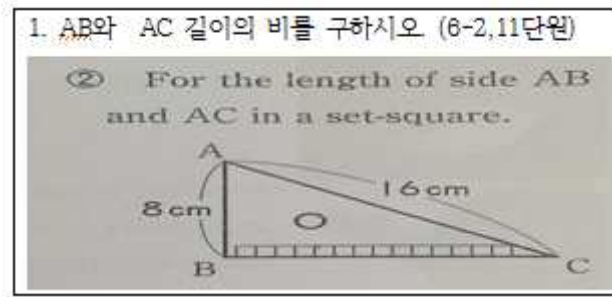


[Figure 14] 'Unit Evaluation' unit's PWC task on Korean textbook

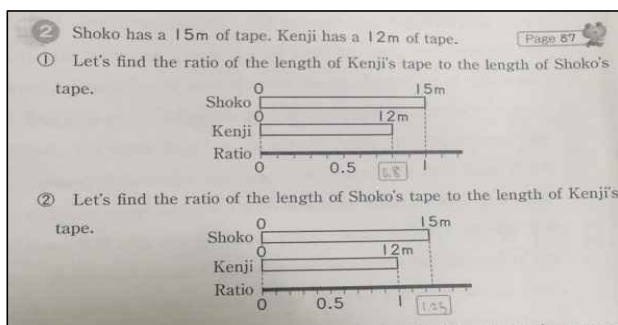
일본 교과서에서는 우리나라 ‘비와 비율’ 내용에 해당하는 단위 평가 문제만 분석하였다. 5-2 ‘15. Ratio and Graph’ 단위 평가 전체 문항(4개)과 6-2 ‘11. Ratio and the Application’ 단위 평가 중 1번 문제로 총 5개의 문제를 분석하였다.

일본 단위 평가의 5문제는 대체로 낮은 수준의 과제였다. PNC 과제는 60%, M과제는 40%였다.

M 과제에 해당하는 문제는 각 학년 단위평가의 1번으로 단순히 비와 비율을 표현해보는 재생문제이다. 그러나 과제의 인지 수준이 우리나라와 같은 M이라고 하더라도 차이점이 존재했다. 일본에서는 실생활 맥락의 문제뿐만 아니라 기하 문제도 제시되었다. PNC 과제에 해당하는 문제는 기준량을 알 때 비교량을 구하는 문제, 비교량을 알 때 기준량을 구하는 문제(이 경우도 길이 모델 제시), 100%가 넘는 백분율을 구하거나 백분율을 알 때 비교량을 구하는 문제와 같이 단순히 알고 있는 절차를 수행하는 문제이다.



[Figure 15] 'Unit Evaluation' unit's M task on Japanese textbook



[Figure 16] 'Unit Evaluation' unit's PNC task on Japanese textbook

14th. Problem solving-comparing camping satisfaction

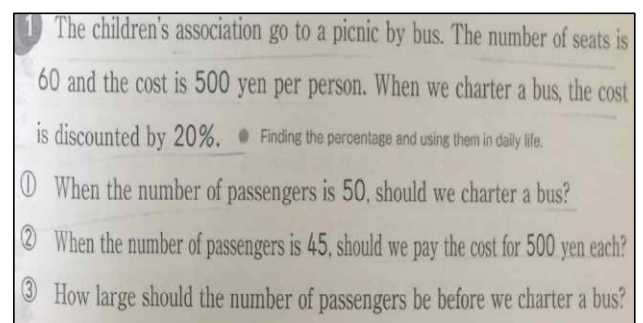
<Table 15> The analysis of tasks in 'problem solving'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea		1 (100%)			1 (100%)
Japan		1 (25%)	3 (75%)		4 (100%)

'문제 해결'은 문제를 해결하는 능력을 기르기 위하여 단원의 주제와 관련된 심화된 문제를 제시하여 학습한 내용을 좀 더 다양하고 깊게 탐구해 볼 수 있는 내용 중심으로 구성된 차시이다. 우리나라 '문제 해결' 차시에 제시된 문제는 세 문제이지만 같은 맥락 하의 문제이므로 전체를 한 문제로 보고 분석하였다. 그 결과 문제 해결의 문제는 PNC 과제로 파악된다. '문

제 해결' 차시임에도 낮은 수준의 과제가 제시된 이유는 단원 학습 주제와 관련하여 백분율의 차이를 의미하는 새로운 개념인 '퍼센트포인트(%p)'를 제시하고 있기 때문이다. 이 개념을 도입하기 위해 두 학교 학생들의 야영 만족도를 비교하는 문제가 제시되었다. 전체의 흐름은 주어진 자료를 보고 단순히 백분율을 계산하여 %p를 이용한 빈 칸 채우기의 활동을 하는 것이다. 이 문제는 알고리즘적이고 문제 해결 시 모호함이 존재하지 않는다.

일본 교과서의 '문제 해결'차시에는 대체로 인지적 노력을 요하는 문제(PWC 과제)가 제시되었다. PWC 과제에 해당하는 문제는 은연 중 확률의 개념을 제시하는 고리던지기 게임 문제와 두 물건의 할인된 판매가격의 차를 비교하는 문제이다. 또한 PWC 과제 중 5학년에게는 상당히 도전적일 수 있는 문제가 마지막 문제로 제시되었다. 이 문제는 버스를 타고 소풍을 가는 상황에서 학생 수에 따라 버스 전체를 전세할 것인지(전세 60석, 20%할인) 좌석별로 요금을 지불할 것인지(1좌석 500엔) 합리적인 선택을 묻는 문제이다. 학생들은 좌석별로 요금이 총 24000엔 이상이면 버스 전체를 전세 내는 것이 이익이라는 사실과 49명 이상 일 때 전세를 내는 것이 이익이라는 사실을 발견해야 한다. 일본 '단원 평가'의 PWC 과제들은 학생들이 단순히 절차만 습득해서는 문제를 해결할 수 없고 문제에 내재된 수학적 아이디어와 절차를 연결할 수 있을 때 해결 가능하다.

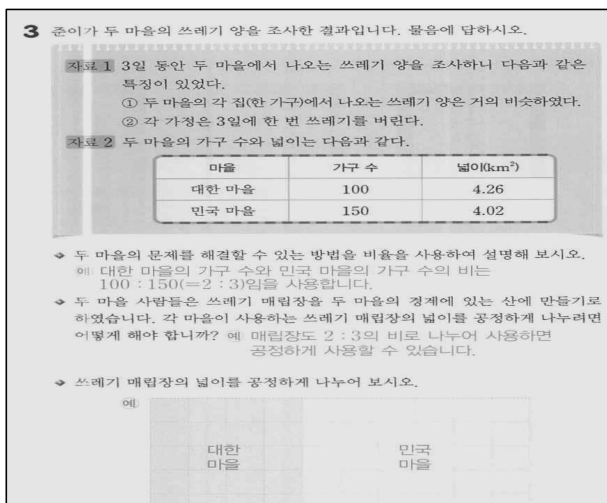


[Figure 17] 'Problem solving' unit's PWC task on Japanese textbook

<Table 16> The analysis of tasks in 'Experience field'

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea				1 (100%)	1 (100%)

‘체험 마당’은 생활 주변 문제, 사회현상, 자연현상 등의 여러 가지 현상과 관련지어 수학을 배움으로써 수학에 대한 가치를 인식하고 수학의 필요성을 느끼도록 구성된 차시이다. ‘비와 비율’ 단원의 ‘체험 마당’에서는 두 마을의 쓰레기 양에 따라 쓰레기 매립장의 넓이를 공정하게 나누도록 의사 결정하는 문제가 제시되었다. 세 문제가 제시되었지만 같은 맥락 하의 문제이므로 전체를 한 문제로 보고 분석하였다.



[Figure 18] 'Experience' unit's DM task on Korean textbook

문제의 난이도가 높지 않음에도 DM으로 분류한 까닭은 이 문제를 해결하기 위해 ① 알고리즘적이지 않은 사고가 필요하고 ② 학생들에게 수학적 개념, 과정, 관계의 본질을 탐구하고 이해하게 하고 ③ 자신의 인지 과정, 의사 결정에 대한 자기 점검 또는 자기 조절을 요구하고 ④ 관련된 지식과 경험을 접하게 하고 과제 해결에 이를 활용하며 ⑤ 가능한 해결 전략과 제약 사항을 능동적으로 검토하게 하는 문제이기 때문이다. 특히 쓰레기 매립장의 넓이를 공정하게 나누어 보는

활동은 다양한 아이디어를 산출할 수 있는 문제로 확산적 사고를 촉진할 수 있다. 즉 이 문제는 문제 해결 능력, 의사 소통 능력, 추론 능력 등과 같은 수학적 과정의 능력을 길러줄 수 있는 문제로 여겨진다.

Conclusions and Implications

Aggeration and Analysis of Textbook Total

<Table 17> The level of tasks on rate and ratio on two countries' textbooks

Level Type Textbook	Low Level		High Level		Total
	M	PNC	PWC	DM	
Korea	2 (3.7%)	31 (57.4%)	20 (37.0%)	1 (1.9%)	54 (100%)
Japan	2 (6.3%)	24 (75%)	6 (18.7%)		32 (100%)

이 연구는 2009 개정 교육과정에 따르는 초등학교 수학교과서가 학생의 수학적 사고를 돕기 위해 수학 과제를 인지적 노력수준에 따라 어떻게 제시하고 있는지, 비와 비율 단원을 중심으로 살펴보고자 하였다. 이에 우리나라 교과서의 4단원 비와 비율에 포함된 총 54개의 수학 과제와 일본 교과서의 동일한 단원에 포함된 총 32개의 수학 과제를 Stein et al., (2009)이 제시한 수학 과제 분석틀을 이용하여 분석하였으며, 이를 통해 수학과제의 인지적 노력수준은 어떠한지 알아보았다.

우리나라 교과서의 4단원 비와 비율을 분석한 결과, 높은 수준의 과제는 38.9%, 낮은 수준의 과제는 61.1%로 나타났다. 특히, 낮은 수준의 과제 중 PNC 과제는 57.4%로 가장 높은 비율을 차지했다. 즉, 우리나라 교과서의 비와 비율 단원에 포함된 대부분의 과제가 PNC 과제의 특징을 갖는 경우라고 할 수 있는데, PNC 과제는 수학 과제를 성공적으로 완수하기 위해 제한된 인지수준을 요구(Stein et al, 2009)하며 단순히 공식에 대입하여 문제를 해결하거나 이전 학습에 의한 알고리즘에 따라 쉽게 정답을 찾을 수 있다는 특징이 있다. 특히 계산 과정에 초

점을 맞춰져 있어 제한된 지식을 사용하고 깊이 있는 사고력을 요구하지 않는데, 이는 우리나라 교과서의 4단원 비와 비율의 PNC 과제가 갖는 대표적인 특징이라 할 수 있다(Gwon & Kim, 2013). 또한 PNC 특징을 갖는 과제들은 앞서 NCTM(2000)에서 설명하는 가치 있는 수학 과제의 특징을 잘 반영하지 못하므로, 현 교과서의 비와 비율 단원에서는 학생들의 복합적이고 창의적인 사고를 기대해보기 어려울 것으로 예상된다.

반면에 일본 교과서의 동일한 단원을 분석한 결과, 높은 수준의 과제는 18.7%, 낮은 수준의 과제는 81.3%로 나타났다. 낮은 수준의 과제 중 PNC 과제는 75%로 가장 높은 비율을 차지했다. 그리고 우리나라 교과서에선, 높은 수준의 과제인 DM 과제가 제시되고 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 이는 일본 교과서와 달리, 우리나라 교과서는 문제해결력을 키울 수 있도록 실생활 과제를 포함하고 있다고 해석할 수 있다. 하지만 이러한 과제들이 그대로 학생들의 높은 인지 과정과 연결되어 사고력을 높이고 수학적으로 의미 있는 활동으로 연결되기 위해선 적절한 교수로 지도해야만 높은 인지 수준으로 도달할 수 있다(Battista, 2007).

분석 결과에서 나타난 특징은 일본 교과서의 수학적 과제가 같은 수학 개념을 반영하는 과제가 주로 제시되어 있었으며 인지적으로 높은 수준의 DM 과제가 나타나지 않았다는 점이다. 구성 비율적인 측면에서도, 우리나라 교과서에서는 낮은 수준의 과제 M와 높은 수준의 과제 DM을 제외하고 유사하게 과제가 구성되어있지만 일본 교과서는 낮은 수준의 과제 M을 제외하더라도 과제 구성 비율이 낮은 수준의 PNC 과제로 쏠린 경향이 있다. 하지만 우리나라 교과서는 인지적 노력수준의 4가지 과제 유형이 모두 포함되었다는 점에서 유의미한 시사점을 찾을 수 있다. 이는 일본 교과서의 과제 유형과 다른 특징으로 생각이 되며, 일본 교과서의 과제가 다양한 수학 과제를 구성하고 있지 않음으로 해석해 볼 수 있다.

위의 우리나라와 일본의 수학과제 인지적 노력수준 결과 분석을 통하여 수학 개념을 어떻게 구성하여 제시할 것인가에 대한 논의는 굉장히 중요하며 이에 관한 논의는 다음 절에서 논하고자 한다.

Implications and Discussion

본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따르는 우리나라 초등 수학 교과서와 일본의 2008 교육과정에 따른 초등 수학 교과서에 제시된 수학적 과제의 인지적 노력수준 비교 분석한 후, 수학교과서가 학생들의 수학적 사고를 돕기 위해 수학 과제를 어떻게 제시하고 있는지 비와 비율 단원을 중심으로 살펴보았다. 이를 위해 구체적인 연구 질문을 다음과 같이 설정하였다. 첫째, Stein et al.,(2009)이 제시한 수학과제 분석틀을 이용하여 우리나라와 일본의 비와 비율 단원에 포함된 수학 과제를 분석하였을 때, 과제의 인지적 노력 수준은 어떠한 차이점이 있을까? 둘째, 우리나라와 일본의 비와 비율 내용은 그 구성 면에서 어떠한 특징을 나타내는가?

이 연구에서 우리나라와 일본 수학과제의 인지적 노력 수준을 분석하였을 때, 전반적으로 유의한 특징을 보였지만 우리나라 수학과제의 경우엔 높은 수준의 D 과제가 포함되었던 반면에 일본 수학과제에선 포함되지 않았다는 차이점이 발견되었다. 이는 일본 초등수학교과서 비와 비율단원에서 포함된 많은 과제들이 형식적인 수학개념에 초점이 맞춰져 있었고 예제나 개념 설명에서 사용된 공식을 그대로 따라하면 해결되는 과제 유형이 많았다고 해석할 수 있다. 또한 대부분의 수학과제가 비슷한 패턴으로 제시되었으며 그 유형도 다양하게 제시되어 있지 않았다. 이는 NCTM(2000)에서 제시된 가치 있는 수학과제로 기를 수 있는 수학적 사고를 키우는데 큰 도움을 주지 않는다. 하지만 우리나라 초등수학교과서에 높은 수준의 DM 과제를 포함하고 있으며, 실제로 이러한 과제들을 통하여 기를 수 있는 수학적 사고를 길러낼 수 있도록 그러한 기회를 제공하고 있음을 알 수 있다.

둘째, 우리나라와 일본의 비와 비율 내용은 그 구성 면에서 어떠한 특징을 나타내는가? 이 연구에서는 우리나라와 일본 초등수학교과서 비와 비율단원의 문항 수의 차이도 발견된다. 우리나라 초등수학교과서 비와 비율단원의 총 문항 수는 58개인 반면에 일본 초등수학교과서의 동일한 단원의 총 문항 수는 32개이다. 따라서 문항의 개수로 우리나라 초등수학교과서와 일본 초등수학교과서의 인지적 수

준의 과제 구성여부를 판단하는데 신빙성이 떨어지므로 비율적은 측면으로 구성여부를 판단하도록 하겠다. 우리나라 교과서 비와 비율단원의 수학 과제의 인지적 노력수준은 낮은 수준의 M 과제는 3.7%, PNC 과제는 57.4%이고 높은 수준의 PWC 과제는 37.0%, DM 과제는 1.9%이다. 반면에 일본 교과서 동일한 단원의 수학 과제의 인지적 노력수준은 낮은 수준의 M 과제는 6.3%, PNC 과제는 75%이고 높은 수준의 PWC 과제는 18.7%, DM 과제는 0%이다. 이는 우리나라 초등교과서는 학생들의 인지적 수준을 높일 수 있도록 4가지 과제유형이 포함되었지만 일본 초등교과서는 높은 수준의 DM 과제를 제외한 3가지 과제유형만을 포함하여 학생들이 높은 수준의 인지 발달할 수 있는 기회를 제공하지 못하였다고 판단된다. 하지만 우리나라 초등수학교과서 비와 비율단원에 높은 수준의 DM 과제를 포함시켜 이러한 기회를 제공하고 있다.

위의 시사점 및 논의를 통하여 수학 과제를 구성할 때 학생들의 문제해결을 위한 전략적인 면을 어느 정도까지 제시해줄 수 있는 것이 바람직한 수준 인지를 인지적 과제분석을 통하여 높은 수준의 인지적 과제를 제시하더라도 교수·학습과정 속에서 과제의 수준이 쇠퇴하지 않도록 과제 분석 등 교사의 적극적인 노력이 필요하다. 그리고 수학교과서에는 이러한 과제가 제시되어 있으나, 여러 가지 변인에 의해 수준이 변화될 수 있으니 교사의 노력이 필요하다(Kim & Bang, 2005). 또한 우리나라 초등교과서와 일본 초등교과서의 발견된 수학과제의 특징 중 좋은 과제 특징만을 선별하여 우리나라 초등교과서 개발 시 반영하여 그 역할을 제대로 할 수 있도록 변화된 노력을 해야 할 것이다.

끝으로 본 연구에서 분석한 일본 교과서는 Gakkoh Tosho(학교도서주식회사)에서 발행한 5~6학년 영문판 교과서를 사용하였다. 그러나 일본의 수학 교과서는 국정교과서가 아니라 검정 교과서이므로 본 연구의 분석 결과가 일본 교과서 과제의 보편적인 인지적 수준이라고 일반화하기는 어렵다. 따라서 일본의 다른 검정 교과서들을 대상으로 한 분석을 통해 폭넓은 데이터가 확보된다면 좀 더 의미 있는 시사점을 제공할 수 있을 것이라 생각된다.

Reference

- An, S. H. & Bang, J. S. (2008). A survey on the proportional reasoning ability of fifth, sixth, and seventh graders . *Mathematics Education Research*, 18(1), 103-121.
- Bang J. S., Lee, J. Y., Lee, S. M., Park, Y. E., Kim, S. G., Choi, I. Y. & Sun, S. J.(2015). A comparative analysis of school mathematics curricula in Korea, China, Japan, and USA. *KSMS*. 18(3). 311-334.
- Battista, M. T. (2007). Highlights of research on learning school geometry. In F. Lester, Jr.(Ed.), *Second handbook oh research on mathematics teaching and learning*(pp. 91-108). Charlotte, NC: Informaion Age.
- Gu, M. Y. & Lee, K. H. (2015). Analyzing and restructuring mathematical tasks of length measurement in elementary school mathematics - Focused on 2nd graders. *KSEME*, 19(3), 387-408.
- Gwon, M. S. & Kim, N. G. (2009). A study on the sixth graders' solving proportional problems in the 7th curriculum mathematics textbooks . *KSEME*, 13(2). 211-229.
- Gwon, J. Y. & Kim, G. Y. (2013). An analysis of mathematical tasks in the middle school geometry. *Mathematics Education*, 52(1), 111-128.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 524-549.
- Hwang, H. J. & Park, H. P. (2013). Exploration on mathematical tasks on function content in MiC 3 level textbook . *KSEME*. 27(4), 449-472.
- Izsak, A., Tillema, E., & Tunc-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction additionon number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 281-310.

- Kim, G. H. & Bak, H. S. (2010). Comparison of the curricula and the textbooks concerning the proportion and ratio Area between Korea and Singapore . *School Mathematics*, 12(4), 473-491.
- Kim, M. H. & Kim, G. Y. (2013). The analysis of mathematical tasks in the high school mathematics . *School Mathematics*, 15(1), 37-59.
- Kim, M. H. (2013). Secondary mathematics teachers' use of mathematics textbooks and teachers' guide . *School Mathematics*, 15(3), 503-531.
- Kim, S. M. (2015). Different views of the US and Korea about mathematical terminologies, 'ratio' and 'rate'. *Mathematics Education Research*, 25(3), 431-448
- Kim, S. H. & Bang, J. S. (2005). An analysis of cognitive demands of tasks in elementary mathematical instruction: Focusing on 'ratio and proportion'. *Mathematics Education Research*, 15(3), 251-272
- Kim, S. H. & Na, G. S. (2008). Teaching the concept of rate and ratio- Focused on using the reconstructed textbook-. *Mathematics Education Research*, 18(3), 309-333.
- Lee, E. Y. & Lee, K. H. (2015). The effect of teachers' reflection for mathematics classroom instruction - Focused on the cognitive demands of mathematical tasks -. *Elementary school mathematics*, 18(2), 155-173.
- Lee, J. E., Kim, J. W. & Park, G. S. (2015). A comparative study on definition of ratios in elementary school mathematics textbooks between Korean and Japanese . *KSEME*. 19(4). 485-499.
- Lee, M. Y. & O, Y. Y. (2007). Influences of expository writing on mathematical communication in elementary mathematics classes. *Mathematics Education Research*, 17(4), 395-418.
- MEST. (2011). *Mathematics courses* (MEST 2011-361).
- MEST. (2015a). *Mathematics 6-1*. Seoul: Chunjae gyoyuk.
- MEST. (2015b). *Mathematics 6-1: Teacher's guide book*. Seoul: Chunjae gyoyuk.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. Ryu Heechan, Cho wanyoung, Lee Kyunghwa, Na guisu, Kim namgyun, Bang jungsook (2007). *Principles and norms for school mathematics*. seoul: Kyungmoonsa.
- Park, G. S. (2015). A comparative study on teaching contents for angle and measure of an angle in elementary mathematics textbook between Korea and Japan . *School Mathematics*, 17(1), 35-46.
- Park, H. J. & Jung, E. S. (2010). An analysis of 'ratio and rate' unit in Korea and America(MIC) elementary school. *Elementary school mathematics*, 14(3), 769-788.
- Shin Hitotsumatsu, et al.(2010). *MATHEMATICS 5-2*, Gakko Tosho Co., Ltd.
- Shin Hitotsumatsu, et al.(2010). *MATHEMATICS 6-2*, Gakko Tosho Co., Ltd.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A case book for professional development* (2nd ed.). New York: Columbia University.
- 文部科学省 (2010). *Elementary school teaching guide for the Japanese course of study: Mathematics(grade 1-6)* (Masami Isoda, Trans.), Ibaraki: University of Tsukuba. (Original work published in 2008).