

대수교육의 양적 추론에 관한 신경과학적 소고

김채연*

대구상원고등학교

Neuroscientific View on Quantitative Reasoning in Algebra Education

Chae-Yeon Kim *

Daegu Sangwon high school

<ABSTRACT>

In this article, I described quantitative reasoning, which provide alternative perspective of current algebra education, and related neuroscientific studies about it. I reviewed studies about neurological mechanism of number sense, relationship of number sense and achievement of mathematics, perception of discrete continuous quantities, and use of symbols, and also discussed studies which is related to learning of algebra. On the basis of reviews, I suggested some topics of neuroscientific study to scrutinize quantitative reasoning.

Key words : Algebra Education, Quantitative Reasoning, Number Sense, Neuroscience

I. 서론

현재 대수 교육은 ‘산술의 일반화가 대수’라는 관점에서 대수와 산술을 분절시키고(Smith & Thompson, 2008) 학생들이 처음부터 자연스러운 일반화 과정과 이를 수식으로 다루었을 때의 유용함을 경험하며 대수적 사고를 발달시킬 수 있는 기회를 놓치고 있다. 이로 인해 산술에서 대수로 이행하는 과정에서 간극이 존재하게 되고 학생들은 풍부한 의미와 유용성을 모른 채 대수를 단순히 규칙과 기호의 조작으로만 다루는 실정이다(Williams,

1997). 이러한 대수 교육의 문제를 극복하기 위해 많은 연구자들은 대수적 추론의 근간이 되는 ‘양’에 대한 추론의 강조에 주목하고 있다(Thompson, 1994; Smith & Thompson, 2008; Ellis, 2011). 양을 직접적으로 다루는 경험은 대수적 사고를 촉진할 수 있는데, 특히 변화하는 두 양 사이의 관계를 직접 다루는 경험은 함수적 사고를 촉진하여 결과적으로 의미 있는 대수 학습이 이루어지게 한다(Ellis, 2011). 따라서 학생들이 지속적으로 다양하고 풍부한 상황에서 양과 양의 관계를 다룰 수 있다면 상위 수학의 추상적인 관계를 다루기 위한 튼튼한 기

* 교신저자 : 김채연, chykim35@naver.com

Received July 27, 2016; Accepted August 11, 2016; Published August 31, 2016

© 2016. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

초를 마련할 수 있을 것이다.

한편, 인지과학이 수학교육에 미치는 영향에서 자주 인용되는 것 중 하나가 산술 학습의 신경적 기초에 관한 연구이다(De Smedt et al., 2010). 수량(numerosity)의 대략적인 많고 적음을 직관적으로 판단하는 수 감각과 관련하여 수량의 크기를 처리하는 능력과 양들 사이의 관계를 비교하는 것에 대한 연구들이 많이 이루어지고 있다. 아직까지 신경과학과 교육적 개입 사이는 ‘머나먼 다리’로 여겨져 왔지만 수학을 학습하는 학생들의 사고를 이해한다는 측면에서는 두 학제 간의 거리가 그리 멀지만은 않을 것이다. 적어도 대수 교육에서 양에 대한 사고를 강조하는 흐름과 신경과학에서 수량을 인식하는 인간의 신경기전에 대해 연구하는 것은 서로에게 시사점을 제공하는 좋은 연결 고리가 되어 줄 것이라고 본다.

본 논문에서는 먼저 대수교육의 동향과 양적 추론에 살펴보고 학생 내부의 사고 메커니즘에 초점을 둔 양, 양적 추론의 의미에 대해 기술할 것이다. 그 다음으로 대수 학습 및 양적 추론을 위한 신경과학적 기초에 대한 문헌 연구를 통해 수 감각, 수 감각과 수학 성취도, 이산량과 연속량의 인식, 기호(숫자 및 문자)의 사용에 대한 생물학적 기전을 알아보고 중등 대수 학습과 관련된 연구들에 관해 논하고자 한다. 이를 바탕으로 대수교육에서 강조하는 양적 추론을 설명하기 위해 신경과학 연구에서 밝혀야 할 의미 있는 주제들을 제시할 것이다.

II. 본론

1. 대수교육의 동향과 양적 추론

Lins & Kaput(2004)은 대수적 사고의 특징을 넓은 의미에서 두 가지로 구분하였다. 첫 번째는 일반화와 일반성을 표현하는 행동에 관련된 것이고, 두 번째는 구문론적, 의미론적인 안내를 포함한 구문-구조화된 일반화의 형식을 바탕으로 한 추론과 관련된다. 대수식에 대한 사고의 발달을 촉진하는 것은 학생들의 문제해결 능력을 향상시키고 특정 중

류의 일반화를 할 수 있는 도구를 제공한다. 그러나 이러한 일반화된 형식에 관한 대수 교육은 학생들이 이전에 구성한 수 및 수량 조작(산술)의 세계와 기호 및 기호적 절차(대수)의 세계 사이를 단절시키는 결과를 낳는다. 이에 Smith & Thompson(2008)은 학생들이 그들의 추론을 표현하고, 의사소통하고, 일반화하는 수단으로 기호적 표현을 사용할 수 있도록 초중등 교육과정이 변화해야 한다고 주장하였다. 또한 이러한 변화가 여전히 어른들에게 익숙한 형태로 제시된다면 학생들은 대수에 대한 의미와 목적을 찾지 못할 것이므로, 학생들이 생산적이고 풍부한 대수적 능숙함을 갖도록 하기 위해서는 완전히 새로운 접근이 필요하다고 하였다.

기존 교과서에서 대수는 특정한 문제를 해결하는 수학적 수단으로 기호적 절차를 소개한 후 기호적 표현을 조작하는 방법을 배우는 것으로 빠르게 옮겨갔다. 그 후 이러한 절차들은 연습을 통해 후에 문장제와 같은 특정 문제에 적용되었다. 이러한 수업은 학생들이 문제에서 요구하는 것들에 대해 단순히 절차를 기억해내서 적용하게 할뿐, 즉각적인 문맥 너머의 의미를 갖게 하지 않는다. 많은 학생들에게 대수는 기호들과 규칙들의 나열과 관련된 의식절차로 전락한다. 이렇게 되면 학생들은 대수를 상황에 대해 추론하는 유용하고 강력한 도구로 여기기보다 의미 있는 대수를 기피하거나 본질을 이해하려고 노력하지 않게 된다(Smith & Thompson, 2008).

여러 학자들이 기존 대수 교육과정의 문제점을 깨닫고 교육과정 개혁의 노력에 초기 대수를 주요 영역으로 삼았다. Smith & Thompson(2008)은 이러한 노력들을 크게 세 가지로 분류하였다. 첫 번째는 학생들의 산술적 능력을 넘어선 실생활 문제를 분석하는 도구로서 대수를 제시하는 것이다. 이는 기존 대수 교과서처럼 단순한 기호조작을 하는 것과 달리 문제 상황이 포함하는 관련 양들을 토대로 삼아 대수적 방법의 발달시키고자 한다. 이러한 과정에서 학생들은 언어로 된 규칙, 값들의 표, 대수적 표현들을 사용하는 능력을 발달시킬 수 있고, 컴퓨터 기반 도구들과 그래픽 계산기들을 통해 이러한 목표를 성취하는데 도움을 받을 수 있다.

두 번째는 수학적 실행의 추상적, 형식적인 면에

초점을 둔 것으로, 초기 대수가 학생들이 추상적인 수학적 대상과 체계를 분석하고 식별할 수 있는 능력을 발달시키는 것이라 제안하고 있다. 이러한 관점은 추상적이고 일반적인 대수적 체계에 대한 연구가 늘고 있는 것에 대한 수학자들의 관심을 반영한다.

세 번째는 K-12에서의 대수 개혁을 직접 계획하는 두 집단(NCTM 대수 특별위원회, NCTM 대수 실무진)의 다원적 접근이다. 그들은 최근의 대수 개혁 제안들에 대한 네 가지 기본 개념을 함수와 관계, 모델링, 구조, 표상과 언어라고 명시하였다. 이것은 이후에 성장과 변화, 숫자, 패턴과 정규성과 같은 다양한 수학적 문맥을 탐구할 수 있도록 하는 개념들이다.

그러나 이러한 대안들은 모두 대수에 대한 접근이 다를 뿐 이것을 저학년에게 도입할 수 있도록 수준을 낮춘 버전으로 개발된다는 점에는 차이가 없다. Smith & Thompson(2008)은 이것이 잘못되었다고 지적하며 학생들이 그들의 양적 세계에 대한 의미를 만들어나가는 과정을 중시하기를 촉구했다. 그들은 양적 추론을 강조하는 새로운 관점으로 모델링, 패턴 찾기, 구조 탐구 등을 통해 추론하는 대수 학습을 제시하였다. 이처럼 현재 대수 학습에서는 학생들이 산술에서부터 양과 양 사이의 관계를 직접 다루고, 변화하는 다양한 양 사이의 관계를 다루는 도구로서 대수를 도입하는 관점에 초점을 두고 있다.

2. 양적 추론의 의미

역사적으로 양, 양 사이의 관계, 양의 변화에 대한 수학자들의 많은 인용이 존재하지만 학생들이 양에 대한 아이디어와 그에 수반된 것들을 구성하는 것은 쉬운 일이 아니다(Thompson & Carlson, 2016). 양적 추론에서 기술되는 ‘양(quantity)’은 문제의 진술이나 수학적 대상에서 설명된 상황에 대한 심상을 가능케 하는, 주체에게 인식된 속성이기 때문이다(Smith & Thompson, 2008).

Thompson(1994)는 개인이 양을 개념화하는 것의 의미에 대해 다음과 같이 설명하였다.

양은 개념적 존재이다. 양은 상황에 대한 인간의 개념 안에 존재한다. 사람은 대상의 질에 대해 측정가능성이 수반되는 방식으로 인식할 때 양에 대해 사고한다. 양은 도식적이다: 그것은 대상, 대상의 질, 적절한 단위나 차원, 그 질에 대해 숫자로 된 값을 부여하는 절차로 구성된다. 사람의 양 개념의 차이는 그들의 도식 내의 구성요소의 발달 수준 차이에 따라 발생한다. 또한 대상은 사람이 주어진 것으로 간주하는 구성이고, 대상의 질은 Piaget가 반복해서 지적했듯이 주체가 그것을 인식함에 따라 부여되는 것이란 점을 나는 명확히 하고 싶다. 지나가는 차를 바라보는 어린이에게 있어, 아마도 대상은 차이고 ‘움직임’은 질일 것이다. 그러나 이 어린이에게 자동차는 ‘시간에 따라 움직이는 거리’라는 질은 갖고 있지 않을 것이다. (Thompson, 1994)

즉, Thompson은 양이라는 것이 외부에 존재하는 어떤 것을 인간이 감각을 통해 인식하는 것이 아니라, 대상의 속성에 대해 측정이 요구되는 상황에서 인간이 스스로 구성하는 개념적인 존재라고 설명하였다. 예를 들어, 두 사람 중 누구의 키가 더 큰가를 판단해야 하는 상황에서 두 사람이 가진 여러 속성 중 ‘길이’가 그 사람에게 양으로 개념화되는 것이다. 이때 그 대상의 속성이 측정의 단위를 갖는 절차를 ‘수량화’라고 한다. 대상의 속성에 값을 부여하기 위해 학생들은 척도를 생각하게 된다. 이때 ‘값’은 구성된 양의 수량화에 대한 수적인 결과이지만, 수량화의 결과가 구체적인 값으로 나타날 필요는 없다.

이러한 양에 대한 개념에 입각해, Thompson(1990)는 양적 추론에 대해 상황의 양적 구조, 즉 양과 양적 관계의 관계망을 분석하는 것이라 정의하였다. 일반적으로, 양적 추론은 학생들이 상황을 인식하는 것과 상황에서 측정가능한 양에 대한 중요성을 강조한다. 이러한 정신적 구조가 만들어지면 이는 학생들이 수학적인 이해와 추론을 발달시키기 위해 반성할 수 있는 토대가 된다(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009).

3. 대수 학습과 관련한 신경과학적 기초

가. 수 감각

수량의 판단은 두 가지 인지 능력에 기초한다. 첫째는 적은 수량을 한 눈에 정확하게 파악하는 직산(subitization) 능력이다. 둘째는 많은 수량을 대략적인 많고 적음으로 파악하는 능력으로 대략적 수 감각(approximate number sense, or number sense; 이하 수 감각)이라 한다. 수 감각은 진화된 능력으로, 특히 작은 숫자의 경우 우리가 그 의미를 굳이 배우지 않아도 노력 없이 자연스럽게 그 감각을 습득할 수 있는 능력을 타고난 것으로 간주된다(Cho, 2013). Cho는 그 예로 영아들의 작은 수 인식에 관한 여러 연구 결과들이 생후 2, 3일의 신생아가 2와 3을 분별할 수 있고 4, 5개월의 아기들이 1+1 혹은 2-1의 간단한 덧셈 및 뺄셈에 대한 인식이 가능함을 보여준다고 하였다. 또한 어린이들의 수 감각의 민감도 자체는 수학 교육을 받는 일반 성인들과 크게 다르지 않았다고 하였다. 이러한 결과들은 대략적 수 감각이 언어 혹은 교육에 의존하지 않는 것으로 해석할 수 있으며, 수 감각이 진화된 능력이라는 이론을 뒷받침한다. 그러나 Gordon(2004)의 연구 결과, 숫자를 세는 언어를 “하나-이=둘-다수” 밖에 가지고 있지 않은 Piraha 부족이 구체적인 수량을 다루는 능력의 결핍을 보여주었으므로 언어나 교육 역시 큰 수 처리에 역할을 한다고 볼 수 있다.

수량의 많고 적음에 대한 비교 판단은 두 개의 수량 혹은 숫자 간의 차이가 클수록 더 정확하고 빠르게 이루어지는데 이것을 거리 효과(distance effect)라 한다. 또한 같은 거리라 하더라도 많은 수량 간의 비교는 적은 수량 간의 비교보다 어려운데 이것을 크기 효과(size effect)라 한다. 이를 통해 두 수량의 비교는 각각의 절댓값이 작을수록 쉽고, 두 수 사이의 크기 차이가 커야 쉽다는 것을 알 수 있다. 수량 비교 및 판단의 민감도는 나이가 들면서 발달 과정 속에서 점차 정교해진다(Cho, 2013).

수와 양에 관한 정보의 처리와 관련이 깊은 뇌의 영역은 크게 두정엽 내구(Intraparietal sulcus 이하 IPS), 좌뇌의 각이랑(angular gyrus 이하 AG), 좌, 우뇌의 후두-측두부 하부 피질(inferior occipito-temporal cortex), 전전두피질(prefrontal

cortex 이하 PFC)로 볼 수 있다. 많은 신경촬영법 연구들이 어린이와 성인 모두 산술적 과제를 해결할 때 크기 처리와 관련된 IPS가 일관되게 활성화된다고 보고하고 있다(De Smedt et al., 2010).

IPS는 수의 크기(quantity)에 대한 의미론적 시스템(semantic system)을 담당하는 영역으로, 좌, 우뇌의 IPS에서는 비언어적 수 감각이 처리된다(Kim, 2010). fMRI 연구 결과에 의하면, IPS 영역은 구체적인 수치를 다루는 계산보다는 수의 비교, 근사적인 계산, 한 자리 수의 뺄셈 등에서 주로 활성화되었다(Dehaene et al., 2003). 이와 같이 IPS는 양의 조작이나 의미에 특정적으로 반응하는 영역으로, 양적 추론의 중요한 기저가 되는 영역으로 볼 수 있다.

Cho(2013)은 원숭이와 인간을 대상으로 한 신경과학 연구에서 IPS의 역할에 대한 여러 연구 결과를 요약하였다. 먼저 원숭이 뇌를 이용한 전기 생리학 실험 결과, IPS 부근의 세포들은 특정 개수의 점 자극을 선호하는 특성을 보였다고 한다. 예를 들어, 5개의 점을 가장 선호하는 세포가 존재하고 그 세포의 경우 점의 개수가 5개일 때 발화율이 가장 높으나 5에서 점점 먼 숫자에 대해서는 발화율이 낮아진다. 이처럼 물체의 수량에 따라 발화율이 조절되는 세포들을 ‘수량 신경 세포’(numeron)라고 한다. 특정 수량에 최대 반응을 보이는 수량 신경 세포들은 선호하는 수량의 크기 순서대로 나란히 배열되어 있음이 관찰되었다. 두정엽 내의 수량 정보 처리 관련 뇌 활동은 태어난 지 3 개월 된 영아들에게서도 발견되었다고 한다. 인간을 대상으로 한 fMRI 연구에 따르면, 인간의 좌, 우측의 IPS는 전체 뇌 영역 중 유일하게 글자, 색, 숫자 등의 자극 중에서 숫자에 대하여 가장 큰 반응을 보였으며, 이러한 현상은 자극들을 시각적으로 제시한 경우와 청각적으로 제시한 경우 모두에서 관찰되었다고 한다. 따라서 수량 정보 처리와 관련한 IPS의 활동은 수량 정보 처리 자체에 의한 것임을 확인할 수 있다. 두정엽 내의 수량 정보 처리 관련 뇌 활동은 4살 아동에게서도 발견되어 상징적 숫자 학습이 이루어지기 전부터 수량 정보 처리 기제로서 두정엽이 관여되는 것으로 볼 수 있다.

수와 양의 처리와 관련한 또 다른 뇌 영역은

AG이다. 이것은 수의 언어적 처리와 관계있는 영역으로, 양적인 처리 과정보다는 구구단과 같이 언어적으로 저장된 단순한 수학적 사실들을 인출할 때 관여하는 것으로 알려져 있다. 그 외에 좌, 우뇌의 후두-측두부 하부 피질(inferior occipito-temporal cortex)은 수의 시각적 인식과 관련 되어 있고, PFC는 고등 인지를 관장하는 영역으로 역시 수와 양의 처리와 관련되어 있다(Kim, 2010).

나. 수 감각과 수학 성취도

Cho(2013)은 여러 연구들에서 수 감각이 대략적인 수량의 추정, 비교, 연산 능력에만 영향을 주는 것이 아니라 더 나아가 숫자를 사용한 수학적 성취도와도 관계된다는 실험적 증거들이 보고되고 있다고 하였다. 이러한 연구 결과들은 수 감각의 정확도가 숫자의 표상 및 숫자를 이용한 수학적 정보 처리의 근간이 된다는 가설로 이어져 많은 연구자들의 관심을 받고 있다.

아이들이 숫자가 수량을 나타내는 외적 표상임을 학습하기 위해서는 새로운 기호인 숫자를 그들이 이미 가지고 있던 수량에 대한 내적 표상과 대응시켜야 한다. Gilmore et al.(2010)의 연구 결과, 비기호적 산술, 즉 숫자 크기의 비교, 상대적 순서, 숫자 간 거리 등 어린이들이 숫자 언어와 기호적 숫자를 배우기 이전에 세운 내적인 수 표상이 기호적 수를 다루는 능력과 학교에서의 성취에 영향을 준다는 것을 알 수 있다. 최근에 발표된 연구에 따르면, 유치원부터 14살까지의 종단적 수학 성취도 점수가 14세에 측정한 수 감각의 민감도와 종단적으로 일관된 상관관계가 있었으며, 유치원 시기에 측정한 수 감각의 민감도가 6개월 후 혹은 6세의 수학적 학습 성취도를 예측할 수 있다고 한다(Cho, 2013). 크기의 비교나 수직선 상의 위치와 같은 수 크기 처리에 대한 측정이 개인의 수학적 발달을 예측한다는 연구들이 있다. Booth & Siegler(2008)은 수직선 추정 과제의 문맥에서 수 크기를 나타내는 이러한 능력이 어린이들이 새로운 덧셈 문제를 학습해서 대답할 때의 오류를 예측한다고 하였다.

그러나 수 감각과 수학 성취도 간에 상관관계를 발견하지 못한 연구들도 있는데, 이러한 연구들은 수 감각의 민감도가 수학 성취도와 상관관계가 나

타나는 이유는 수 감각을 측정하는 실험 과제가 인지 억제(cognitive inhibition) 기능을 유발시키며, 인지 억제기능과 같은 집행 기능(executive function)이 수학 성취도와 관계되기 때문이라고 주장한다(Cho, 2013). 하지만 발달적 난산증과 같은 장애로 인해 수 감각이 부정확한 학생들은 수량 추정(numerical estimation) 과제에서 오류가 향상되는 속도가 정상적인 학생들에 비해 느리다(Siegler & Booth, 2004). 이러한 연구들을 종합했을 때, 수 감각과 수학 성취도가 완벽한 인과관계를 형성한다고 할 수는 없지만 유의미한 관련성이 있다는 결론을 내릴 수 있다. 또한 수 감각의 민감도가 수학 성취도에 긍정적인 영향을 줄 수 있다면, 수학의 여러 하위 영역 중 가장 관련이 깊은 영역은 수와 연산을 다루는 대수 영역이라고 볼 수 있다. 따라서 학생들의 수학 학습 능력의 예측을 위해 수 감각과 수학 성취도 간의 관계에 대한 더 많은 연구가 요구된다.

다. 이산량과 연속량의 인식

수 감각에 관한 연구들에서 다루는 수량은 불연속적인, 혹은 이산적인(discrete) 양이다. 이러한 이산적인 수량에 대한 추론은 공간, 시간 등 다른 연속적인 양에 대한 추론과 매우 밀접한 관계가 있을 것으로 예상할 수 있기에 신경과학 분야에서는 수, 공간, 시간이 공통의 표상 혹은 정보 처리 체계를 공유한다는 가설이 제기되어 이를 검증하는 연구가 진행 중이다(Cho, 2013). 양적 추론의 관점에서 함수적 사고를 연구하는 수학교육자들은 연속적인 양을 추론하는 방식으로 덩어리(chunky) 사고와 매끄러운(smooth) 사고를 구분한다(Castillo-Garsow, 2010). 덩어리 사고는 연속량을 잘라서 이산적인 양으로 다루는 것과 관련이 있고, 매끄러운 사고는 연속적인 변화의 심상을 갖고 사고하는 것과 관련이 있다. 학생들의 사고에 대한 모델을 만드는 과정에서 연속적인 양을 다루는 방식을 구분할 수 있었으나 두 사고방식의 기제, 혹은 덩어리 사고에서 매끄러운 사고로 어떻게 발달할 수 있는지에 대한 연구는 계속 진행 중이다. 불연속량과 연속량을 다루는 신경적 기전이 설명된다면 이러한 연구에 실증적인 근거가 마련될 것으로 보인다.

Cho(2013)은 시간, 공간, 수의 표상에 대한 신경학자들의 관점은 크게 세 가지로 구분하였다. 첫 번째는 세 표상이 공통적인 양의 체계를 가진다는 것이다. Walsh et al.(2003)은 공통 양 이론(A Theory of Magnitude, ATOM)에서 시간, 공간 그리고 수 표상이 공통의 양 체계(a common magnitude system)에 의해 인지된다고 하였다. 두 번째는 서로 다른 양적 표상이 각기 독립적인 표상 체계를 지니지만, 그들 간에 서로 부분적으로 공유되는 부분이 존재할 수 있다는 주장이다(Cohen Kadosh et al., 2008) 세 번째는 수, 크기, 시간 등 서로 다른 차원의 양에 대한 감각은 각기 다른 인지신경학적 체계(multiple magnitude system)에 기반한다고 주장한다(Moyer & Landauer, 1967).

여러 신경과학의 연구 결과들이 첫 번째 혹은 두 번째 관점에 대한 증거를 제시하고 있다. Cohen Kadosh et al.(2008)의 크기 일치 효과 연구는 두 숫자를 비교하는 과제에서 숫자의 의미적 크기와 제시된 숫자의 물리적 크기가 일치할 때 더 정확하고 빠르게 반응하는 현상을 말한다. 크기 일치 효과는 작은 숫자보다 큰 숫자의 시각적 크기가 크거나 더 밝을 때 더 빨리 처리하는 것으로 보아 수량에 관한 정보와 연속량이 자동적으로 함께 처리된다고 해석할 수 있다. 또한 Walsh et al.(2003)는 동물이 시각적인 대상에 대하여 운동 반응을 할 때에 대상의 크기, 수, 속도, 거리 등에 대한 정보를 종합해야만 정확한 운동 반응을 위한 근육의 수축 프로그램을 계산할 수 있으므로, 수, 시간, 공간에 대한 공통의 기제가 존재할 것이라는 가설을 제시하였다. Pinel et al.(2004)은 IPS에 수와 시각적 크기의 비교를 가능케 하는 공통된 인지신경학적 기전이 존재하나 수와 밝기는 서로 독립적으로 처리된다고 보고하였다. 이러한 증거는 IPS 영역에 크기나 길이와 같은 시각적으로 연속적인 양과 수에 대한 공통의 인지신경학적 기전이 존재할 가능성을 뒷받침한다(Cho, 2013).

라. 기호(숫자 및 문자)의 사용

상징적 숫자(symbolic number)의 습득 과정과 같이 숫자를 이용한 수학적 정보처리가 발달하는 과정에 대한 실험 연구는 비교적 많이 이루어지지

않았다(Cho, 2013). 대수 학습은 수와 양을 다루는 단계에서 기호를 사용한 추상적 단계로의 이행을 반드시 수반하기 때문에 수학적 기호의 사용과 관련한 신경기전을 밝히는 연구들이 필수적으로 요구된다.

수가 처리되고 수의 크기를 표상하는 것으로 알려진 IPS 영역은 수량 크기의 표상이나 처리에도 매우 중요한 역할을 한다(Ansari, 2007). Piazza et al.은 기호 표기의 변화와 상관없이 IPS와 전두엽에서 거리효과에 의해 활성화가 일어남을 관찰한 한편, Cohen Kadosh et al.은 좌우뇌의 비대칭적 반응을 통해 좌뇌의 두정엽 피질은 형식에 관계없이 단일한 추상적 표상이 존재하고, 우뇌에서의 표상화는 표기 형식에 따라 달라지며, 비추상적인 표상화도 동시에 존재한다는 사실을 밝혔다(Kim, 2010).

De Smedt et al.(2010)은 Lee et al.이 싱가포르 학교에서 가르치는 두 가지 방법으로 대수 문제를 해결하는 것에 대해 연구한 것에 대해 소개하였다. 하나는 도식적 방법(학생들이 도식을 이용해 단어로 표현된 문제들의 관계를 그려보는 것)이고 하나는 기호적 방법(학생들이 단어도 표현된 문제를 수식으로 바꾸는 것)이다. 행동적 연구에서는 두 방법의 결과가 같았지만, 기호적 방법으로 해결할 때 학생들의 뇌의 상위 두정엽(superior parietal lobules)과 설전부(precuneus) 영역이 더 활성화되었다. 이것은 기호적 방법이 더욱 주의집중이 요구된다는 것을 의미한다(De Smedt et al., 2010).

현재 밝혀진 연구들에 의하면 상징적 숫자의 의미를 습득하는 과정에는 PFC 영역이 관여되는 것으로 보인다. 이러한 해석과 일치하는 몇몇 fMRI 연구들은 숫자를 배운 지 오래되지 않은 어린 아이들이 숫자에 대한 정보 처리를 할 때 PFC의 활동성이 어른들과 비교하여 유의미하게 높았다는 연구 결과, 연령의 증가와 함께 숫자 정보 처리가 점차 자동화됨에 따라 전두엽의 활동성은 감소하고, 특히 좌반구 후측 두정엽과 후두-측두엽(occipito-temporal lobe)의 활동성이 더 증가한다는 연구 결과, 성인의 수학 정보 처리 기제에 대한 뇌 인지 모형에는 수 표상을 담당하는 IPS와 숫자와 수학적 연산 부호와 같은 상징적 기호를 빠르게 재인하고 처리하는 방추형 이랑(fusiform gyrus) 등

하측 측두엽(ventral temporal lobe) 영역이 포함된다. 연구 결과 등을 제시한다(Cho, 2013). 이러한 연구들은 어린이가 상징적 숫자를 처음 배울 때 기존에 자신이 가진 수량에 관한 표상과 그 기호를 연결시키기 위해 PFC를 활성화시키는 인지적 노력이 필요하나, 숫자와 수량의 표상 간의 네트워크가 형성되면 숫자를 수량을 다루는 것과 같은 신경회로로 사용할 수 있다는 것을 의미한다. 이를 확장하면, 구체적인 숫자에서 변수 개념으로 이행하는 한 단계 추상화된 과정에서도 비슷한 메커니즘을 기대할 수 있다. 변화하는 다수의 수량을 한 변수로 대체시키는 과정을 통해 변수를 다루는 것은 IPS와 같이 수량에 관련된 영역을 활성화시켜 문자를 의미 있게 다룰 수 있는 가능성을 제시한다. 학생들이 대수적 기호를 조작함에 있어 수량과 관련한 부분을 함께 활성화할 수 있다면 대수 학습이 의미 없는 단순한 기호의 조작에서 문제 상황의 맥락을 담은 양을 다루는 의미 있는 활동이 될 수 있을 것이다.

마. 중등 대수 학습과 관련된 연구

중등 수준의 높은 수학 학습과 관련하여서는 PFC의 역할이 크다고 할 수 있다. 미적분과 같은 고등 수학 문제를 해결할 때 기초 산술과 관련된 영역들(IPS, AG)뿐 아니라 PFC 영역이 활성화되었는데, 이때 PFC의 활성화는 연산의 순차적 명령, 집행 기능의 제어, 언어적인 응답의 억제 등의 활동을 하는 것으로 볼 수 있다(Kim, 2010). 고등 수학적 활동을 할 때 기초 산술 관련 영역이 활성화 된다는 사실은 의아할 수 있으나 복잡한 사고도 결국은 단순한 규칙들과 사실들을 논리적으로 종합하는 과정을 포함한다는 사실을 고려한다면 이해될 것이다(Kim, 2010). 또한 이 영역은 $a+b=c=d$ 형태의 암산을 할 때 성인에 비하여 청소년들에게 더 활성화되는 것을 보였고 성인들은 PFC 보다는 좌뇌의 IPS를 포함한 두정엽 피질이 활성화되는 것을 보였는데, 이러한 결과는 청소년들의 경우 성인과 같은 수준의 암산 수행 능력에 도달하기 위하여 더 많은 작업 기억과 주의를 요구하기 때문으로 해석된다(Kim, 2010).

Qin et al.(2004)은 평균 13.1세의 학생들 및 대

학생이 대수방정식(예를 들면 $7x+1=29$)을 푸는 것을 배울 때 뇌 영역이 활성화되는 것에 대해 fMRI 연구를 수행하였다. 대학생들의 경우 뇌의 인지 영역 세 부분이 활성화 되는 것을 관찰하였는데, 첫 번째 영역은 주어진 방정식과 계산을 수행하면서 바뀌는 식의 표상을 나타내는 imaginal module(왼쪽 두정엽 피질), 두 번째 영역은 방정식을 풀기 위해 필요한 대수적 규칙과 산술 지식을 생각해내는 retrieval module(왼쪽 전두엽 피질), 그리고 결과를 손 운동으로 바꾸어 쓰게 하는 manual module(오른손을 제어하는 왼쪽 운동 감각 피질) 등이 연관되어 있었다. 청소년기의 학생들도 비슷한 영역이 활성화 되는 것을 관찰하였다. 훈련의 효과로 활성화 되는 영역이 감소하였는데 대학생들은 왼쪽 전두엽만 연습 후 활성화 되는 영역이 감소했지만 청소년들의 경우는 왼쪽 전두엽과 왼쪽 두정엽 모두 연습 후 활성화 되는 영역이 감소하였다. 이것은 상대적으로 수의 뉴런만으로도 작업을 처리할 수 있게 되었음을 의미한다(Kim, 2010).

4. 신경과학적 연구에 기반 한 대수 교육에의 함의점

De Smedt et al.(2010)은 대수 교육에 시사점을 던져줄 수 있는 두 연구를 소개하였다. 먼저 Delazer et al.(2005)는 수학적 지식을 무턱대고 외우는 접근과 산술적 관계와 기본 원리의 이해가 강조된 교수법을 비교하였다. 그 결과, 둘 다 문제를 똑같이 빨리 해결할 수 있었음에도 불구하고 두 교수법 처치 사이의 뇌 활성화 패턴에 차이가 드러났다. 수학적 기본 원리의 이해를 강조하는 수학 수업이 바람직하다는 것은 공통적으로 동의하는 사실이지만, 비슷한 행동적 결과를 낼 때 무턱대고 규칙을 외우는 접근이 효율적이란 이유로 암묵적으로 지향하는 경우가 많다. 이러한 연구 결과는 곱셈 공식 및 인수분해 공식의 암기, 조립제법, 소인수분해 방식과 같이 단순히 문제를 풀기위해 외우는 툴의 사용이 진정한 수학 학습이라 할 수 있는가에 대한 의문을 제기하게 하고, 더 나아가 어떠한 뇌 영역의 활성화를 추구하는 것이 수학을 의미 있게 배우는 것인가에 대해 재고할 기회를 제공한다.

둘째, Stavy & Babai(2009)의 연구는 기하에 있어 직관의 간섭에 관한 본질을 조사하였다. 그들은 참가자들이 두 가지 기하학적 모양의 둘레를 비교하는 동안의 뇌 활성을 탐구하였다. 이를 두 조건 아래에서 실시했는데, 하나는 직관적으로 추론할 수 있는 것이고, 다른 하나는 직관적이지 않은 답을 가졌다. 그 결과, 직관적이지 않은 답을 구할 때 뇌에서 통제하고 제어하는데 중요한 PFC와 같은 영역이 활성화 되었다. 이는 수 감각을 측정하는 실험과제가 인지 억제기능과 같은 집행 기능을 수행 수학 성취도와 관계되기 때문에 수감각의 민감도가 수학적 성취도와 연결된다고 하는 연구와 관련이 있다. 수학 학습에서 중요한 것은 직관을 극복하기 위해 자신의 사고를 통제하고 제어하여 논리적인 사고 과정을 끌어나가는 것이라 할 수 있다. 이러한 과정은 이성적으로 삶을 통제하고 합리적인 사고를 할 수 있는 PFC의 활성을 불러일으키고 발달을 촉진하게 되므로, 수학을 왜 배워야 하는가에 대한 하나의 신경과학적 해답이 될 수 있다고 본다.

구성주의적 관점에서 학생들은 자신이 가진 도식을 바탕으로 지식을 구성해나갈 수밖에 없다. 수학 학습의 기초가 되는 수와 양의 처리가 이루어지지 않은 학생에게는 숫자 학습 및 간단한 사칙연산과 같은 것들도 단순히 외워야하는 언어적 사실에 불과하다. 이런 학생들에게 수준 높은 수학을 반복하여 가르친다 해도 그들의 수학적 이해를 증진시키는 것은 어려운 것이다. 따라서 일찍이 신경과학적 도구를 통해 난산증과 같은 비정상적인 발달 아동을 발견한다면, 높은 수준의 수학적 지식이 구성되는 기초인 수 크기 처리 과정(Booth & Siegler, 2008)과 같은 기초적인 부분을 미리 교정할 수 있을 것이다.

III. 결론

신경과학에 있어 인지활동은 인간 내부에 숨겨진 어떤 것이 아니라 관찰할 수 있는 ‘물질적인 과학’이다. 신경과학에서 얻은 연구가 뒷받침되는 교육적 주장은 다른 가설보다 더 설득력을 지니기 쉬운 것

이다. 또한 신경과학 기법을 통한 뇌 활성화에 대한 연구 결과들은 행동적인 연구로는 예측할 수 없었던 새로운 발견을 생성한다. 이렇듯 신경과학이 도구와 방법론들을 제공하는 동안, 그것의 사용이 심리학과 교육학 이론에 의해 안내되어 연구 결과들의 수렴을 통해 보완될 때만 그것이 오직 생산적일 수 있다(De Smedt et al., 2010).

현재 대수 교육에서는 학생들이 풍부한 의미와 유용성을 모른 채 대수를 단순히 규칙과 기호의 조작으로만 다루는 것에 대한 대안으로 초기 대수에 있어 직접 양을 다루는 경험을 토대로 문자를 의미 있게 구성할 수 있는 양적 추론을 강조하고 있다. 양은 인간이 자신의 상황에서 어떤 대상의 속성에 대해 측정이 필요하다고 느낄 때 스스로 구성하는 개념적인 산물이다. 신경과학 연구에 의하면 이러한 수량에 관한 개념은 진화적으로 획득하는 것이며 태어난 지 얼마 되지 않은 신생아마저도 가능한 생물학적 기전이다. 신경과학 연구들은 수량을 추정하고 비교하는 인지적인 과정인 수 감각에 대해 풍부한 설명을 제공한다. 여러 신경과학 연구들의 결과와 같이 수 감각의 민감도가 수학 성취도에 긍정적인 영향을 줄 수 있다면 그것은 대수 영역에서의 성취와 가장 관련이 깊을 것이다. 수 감각은 수와 양에 관한 처리를 강조하는 양적 추론의 강조에 필수적이기 때문이다. 따라서 학령기 이전에 학생들의 효과적인 대수 학습의 준비를 위한 교육적 조치들을 마련하기 위해서는 수 감각, 여러 종류의 수학적 개념, 과제 수행과의 관계에 관한 연구가 필요할 것이다.

한편, 양적 추론에서는 학생들의 효과적인 대수 학습을 위해 함수적 사고가 필요하다고 지적한다. 함수적 사고는 변화하는 두 양의 관계에 대한 추론을 수반한다. 이때 변화는 암묵적인 시간의 흐름을 전제하므로 대부분 연속적인 변화를 다루고 있다. 그러나 연속적인 변화를 다루는 학생들 모두가 이를 매끄럽게 다루는 것이 아니라 일부 학생들은 연속량을 이산적인 덩어리로 다룬다. 이처럼 같은 상황에 대해 연속적, 이산적으로 추론하는 학생들의 차이에 대한 연구는 이루어졌으나 이들 사이의 발달에 대한 연구는 이루어지지 않았다. 신경과학에서 이산량인 수와 연속량인 공간, 시간 사이의 공통 기

제에 대해 이루어지고 있는 연구는 불연속량과 연속량을 다루는 신경적 기전을 설명하고 실증적인 근거를 제공할 수 있을 것으로 보인다.

대수 학습은 수와 양을 다루는 단계에서 기호를 사용한 추상적 단계로의 이행을 반드시 수반하기 때문에 수학적 기호의 사용과 관련한 신경기전을 밝히는 연구들 또한 요구된다. 변화하는 다수의 수량을 한 변수로 대체시키는 경험을 통해 변수를 다룬다면, IPS와 같이 수량에 관련한 영역의 활성화를 토해 문자를 의미 있게 다룰 수 있을 것이다. 즉 학생들이 대수적 기호를 조작함에 있어 수량과 관련한 부분을 함께 활성화할 수 있다면 대수 학습의 의미 없는 단순한 기호의 조작에서 문제 상황의 맥락을 담은 양을 다루는 의미 있는 활동이 될 수 있을 것이다. 이와 관련한 신경과학적 연구가 이루어진다면 현재 대수 학습의 어려움을 극복할 수 있는 방안으로 양적 추론을 강조하는 접근에 더욱 실증적인 연구가 이루어질 것으로 본다.

수학 학습의 신경적 기전을 이해하는 것은 어떠한 뇌 영역의 활성화를 추구하는 것이 수학을 의미 있게 배우는 것인가, 어떤 것을 이해하는 것이 진정한 수학 학습이라 할 수 있는가에 대해 재고할 기회를 제공한다. 진정한 대수 학습이란 무엇인가에 대해 근본적으로 고찰하고, 대수 학습의 기초가 되는 수와 양에 대한 발달이 어떻게 이루어지는지에 대한 생물학적 증거를 바탕으로 대수 학습이 나아가야 할 방향을 설정한다면 앞으로 더욱 실증적이고 합리적인 방향을 모색할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- Ansari, D. (2007). Does the parietal cortex distinguish between "10," "ten," and ten dots? *Neuron*, 53, 165-167.
- Babai, R., Sekal, R., & Stavy, R. (2010). Persistence of the intuitive conception of living things in adolescence. *Journal of Science Education and Technology*, 19(1), 20-26.
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development*, 79(4), 1016-1031.
- Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth* (Doctoral dissertation, Arizona State University).
- Cho, S. (2013). A Review of the Neurocognitive Mechanisms of Number Sense. *Korean Journal of Cognitive Science*, 24(3), 271-300.
- Cohen Kadosh, R., Lammertyn, J., & Izard, V. (2008). Are numbers special? An overview of chronometric, neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in Neurobiology*, 84(2), 132-147.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive neuropsychology*, 20(3-6), 487-506.
- Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C. M., & Felber, S. (2005). Learning by strategies and learning by drill -evidence from an fMRI study. *Neuroimage*, 25(3), 838-849.
- De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula, M. M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2010). Cognitive neuroscience meets mathematics education. *Educational Research Review*, 5(1), 97-105.
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In *Early Algebraization* (pp. 215-238). Springer Berlin Heidelberg.
- Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, 115(3), 394-406.
- Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science*, 306(5695), 496-499.
- Kim, Y. (2010). Neurobiological Aspects of

- Epistemology and Brain Areas related to Mathematical Activities. *Journal of Educational Research in Mathematics* 20(1), 21–43
- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study* (pp. 45–70). Springer Netherlands.
- Moore, K. C., Carlson, M. P., & Oehrtman, M. (2009). The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems. In *Conference on research in undergraduate mathematics education (CRUME)*. Raleigh, NC.
- Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Distributed and Overlapping Cerebral Representations of Number, Size, and Luminance during Comparative Judgments. *Neuron*, 41(6), 983–993.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428–444.
- Smith, J., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 95–132.
- Thompson, P. W. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. Manuscript. Center for Research in Mathematics & Science Education, San Diego State University.
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1 (Vol. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (in press). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking in mathematics. *Compendium for Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Williams, S. (1997). Algebra: what students can learn. The nature and algebra in the K-14 curriculum. In *Proceedings of a National Symposium* (pp. 27–28).
- Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, 7(11), 483–488.