

단위화 드러내기를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 이해

김용석 · 이광호*
한국교원대학교

Understanding of Multiplication and Division of Fractions through Revealing Unitizing

Yong-Seok Kim, Kwang-Ho Lee*
Korea National University of Education

<ABSTRACT>

The purpose of this study is to identify the role of 'revealing unitizing' that a rational number is unitized by expressing as ' $a \times 1$ ' when students face multiplication and division, and to identify how they understand multiplication and division of fraction through the 'revealing unitizing.' To figure out the role of the 'revealing unitizing', the researchers first defined the 'revealing unitizing' through literature review and preliminary studies related with unitizing, multiplication, and division. The 'revealing unitizing' was applied to the 3 sixth graders from Y elementary school located in Seoul. Data were collected from the in-depth interviews of the cases and analyzed by categorizing. There is a need to let the students recognize the meaning of unitizing clearly through 'revealing unitizing' to have them recognize the meaning of multiplication and division precisely in the multiplication and division situation, and to teach students the meanings of multiplication and division in a mid-process that connects problem situation with formal knowledge by applying 'revealing unitizing.'

Key words : Fraction, Unitizing, Multiplication, Division

* 교신저자 : 이광호, paransol@knue.ac.kr

Received July 24, 2015; Accepted August 10, 2015; Published August 31, 2015

2015. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

I. 서론

학교 수업에서 일반적으로 곱셈 및 나눗셈과 같은 수학적 개념을 지도할 때 먼저 그림이나 구체물을 이용하여 직관적으로 개념을 구성할 수 있도록 도와주고 이를 바탕으로 추상적인 기호를 사용하여 문제 상황을 수식 등으로 형식화하여 수학적 개념을 지도한다. 그런데 이처럼 그림이나 구체물을 통해 지도한 후 이를 형식화하여 지도하지만 수학적 지식구성의 결과인 형식화된 절차를 학생들이 습득하게 되면 이전에 직관적으로 개념을 구성한 것들은 잊어버리는 경우가 발생하게 되고 결국은 형식적 절차와 같은 절차적 지식만을 학습한 결과가 되기도 한다(Kang et al., 1999). 이러한 절차적 지식만으로 곱셈과 나눗셈을 학습한 학생들은 계산 능력은 뛰어나지만 다른 학생들보다 문장제 해결력이 떨어지는 문제점이 발생한다(Kim & Whang, 2011). 이러한 문제를 해결하기 위해 좀 더 다양한 조작적 체험이나 직관적인 경험을 할 수 있는 수업이 학교에서 풍부하게 이루어져야 하지만 학교 수업이 근본적인 이해보다 절차적 기능과 형식적, 계산적 측면을 강조하여 지도한다면 이런 문제가 계속 발생할 것이다.

본 연구는 이러한 문제점을 해결하기 학생들에게 단위화 드러내기를 통해 단위화를 초점화 함으로써 비형식적 지식을 형식화하는 것을 용이하게 하고 역으로 형식화된 절차적 지식에서 단위화 드러내기를 통해 비형식적 문제 상황을 이해하는데 도움을 주고자 한다.

이에 본 연구는 학생들이 다양한 곱셈과 나눗셈 상황에서 암묵적으로 드러나지 않은 단위화에 대한 개념을 명시적으로 드러내 보이는 것이 무엇이며 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기의 역할이 무엇인지 살펴보고, 곱셈과 나눗셈 상황에서 학습자가 수학적 지식을 구성하는데 단위화 드러내기가 어떤 효과가 있으며 단위화 드러내기를 통해 곱셈과 나눗셈을 어떻게 이해하는지를 알아보는데 목적이 있다. 이를 통해 학생들이 분수의 곱셈과 나눗셈을 형식적 절차로만 이해하고 있는 학생들에게 직관적, 의미론적으로 이해할 수 있도록 도와주고, 학생을 지도하는 교사들에게는 곱셈과 나눗셈의 다양한 상황과 연결하여 곱셈과 나눗셈의 형식화를 지도하는데 도움을 주

고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 단위화의 의미

Steffe(2002)는 ENS(the Explicitly nested Number Sequence)의 예를 들며 27은 1이라는 단위가 27개 모여 있는 것인 동시에 하나의 전체로 학생들이 간주할 수 있으면 ENS 수세기 스킴이 형성되어 있다고 하였다. 여기서 단위화는 27과 같이 전체(whole)이면서 동시에 단위가 27개 모여 있는 것으로 간주하는 것을 의미한다.

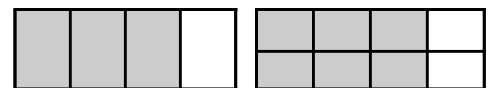
Lamon(2012)은 단위화란 어떤 구체적인 맥락과 상황 속에서 어떤 특정한 양에 대해 단위를 구성해 나가는 과정이라고 하였으며 단위 ‘하나’는 하나의 물건을 셀 때뿐만이 아니라 한 가지 사물 이상으로 이루어진 합성된 단위를 뜻할 수 있다고 하였다.

따라서, 단위화는 맥락과 상황에서 물체의 양을 결정하기 위해 사물(양)이나 사물(양)의 모임을 하나 혹은 전체로 보아 단위를 구성하는 과정이라고 할 수 있다.

2. 단위화의 효과

Lamon(2012)은 단위화를 곱셈적(multiplicative) 사고를 할 때 기본이 되는 주요 개념으로 보았고 단위화는 주로 분수 개념을 지도할 때 유용한 개념으로 활용된다고 하였다.

첫째, 단위화는 같은 양에 대한 동치 개념을 이해하는데 도와준다. 아래 [Figure 1]처럼 $\frac{3}{4}$ 을 단위화(하나의 단위로 보는 것)했을 때 $\frac{6}{8}$ 은 같은 양을 가진 동치 분수이며 단위화는 동치 분수에 대한 동치 개념을 이해하는데 도와준다.



[Figure 1] $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ (Equivalent fraction)

둘째, 단위화는 측정 상황의 분수를 이해할 때 도움이 된다. 아래 [Figure 2]처럼 길이 재기를 할 때 적절한 단위()가 필요하고 측정 단위가 자연수배가 되지 않을 때 재고 남은 길이를 재기 위해 적절한 단위()를 단위화하여 작은 단위가 필요하고 작은 단위는 적절한 단위를 1로 보았을 때 $\frac{1}{3}$ 즉, 분수로 표현할 수 있다.



[Figure 2] $1 \text{ and } \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$ (Measurement)

셋째, 단위화는 몫의 분수를 이해하는데 도움을 준다. [Figure 3]과 같이 색종이 3장을 4명에게 똑같이 나누어 주었을 때 한 사람이 가지는 양은 몫의 분수가 되며 한 사람이 가지는 몫은 색종이 $\frac{3}{4}$ 장이 된다. 이 때 4명에게 똑같이 나누어 주어야 함으로 색종이 3장을 단위화(하나의 단위로 보는 것)할 필요가 있으며 4등분으로 똑같이 나누는 등분할 조작이 필요하다.

[Figure 3] $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ (Quotient)

넷째, 단위화는 비율 분수를 이해하는데 도움을 준다. 비율은 두 양을 비교할 때 상대적인 크기를 나타내며 부분-전체를 비교할 때는 분부-전체로서의 분수가 되고 부분-부분을 비교할 때 비율 분수가 된다. 예를 들면, 철수가 300원을 가지고 있고 영희가 200원을 가지고 있다면 철수를 기준으로 영희가 가지고 있는 돈의 비율은 $\frac{200}{300}$ 이 되며 약분을 하면 $\frac{2}{3}$ 가 된다. 이때 $\frac{2}{3}$ 는 철수의 돈 300원을 단위화(1로 보는 것) 했을 때의 상대적인 크기이다. 마찬가지로 영희의 돈 200원을 단위화(1로 보았을 때) 했을 때

의 상대적인 크기는 $\frac{300}{200} = \frac{3}{2}$ 이 된다.

다섯째, 단위화는 분수의 연산자의 의미를 이해하는데 도움을 준다. 연산자의 분수는 어떤 양(수)을 확대나 축소를 통해 새로운 양(수)으로 변화시키는 분수를 의미한다. 예를 들면, 막대의 길이가 12cm인데 그림자의 길이는 9cm가 되었다면 막대의 길이를 단위화(1로 보는 것)으로 했을 때 그림자의 길이는 $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 으로 축소된 길이가 된다.

3. 폴라니(Polanyi)의 인식론과 단위화의 관계

조주의와 구성주의를 통합적으로 바라본 폴라니(Michael Polanyi, 1891-1976)는 암묵적 지식과 암묵적 지식에 바탕을 둔 초점식과 보조식을 주장하였으며 지식의 구성은 암묵적 지식을 초점화함으로써 이루어진다고 하였다. 즉 명시적으로 드러나지 않은 지식을 우리의 인식작용을 통해 초점화함으로써 그 지식을 의식하게 되어 지식이 구성된다고 하였다(Nam, 2008).

폴라니의 인식론과 단위화의 관계를 살펴보면 다음과 같다. 단위화의 의미와 단위화의 효과를 살펴 보았듯이 단위화가 명시적으로 드러나지 않고 암묵적으로 제시되어 있어 분수의 의미와 분수 연산을 이해하는데 많은 학생들이 어려움을 겪고 있다(Kwon & Kim, 2009; Sim, 2014; Lee & Pang, 2014). 폴라니의 인식론적 입장처럼 암묵적 지식인 단위화를 우리의 의식 속으로 초점화할 수 있다면 단위화에 대한 개념적 이해를 도울 수 있을 것이다.

4. 단위화 드러내기의 의미

암묵적 지식인 단위화를 초점화하기 위해 명시적 언어로 단위화를 드러낼 필요가 있다(Nam, 2008). 따라서 단위화 드러내기는 어떤 맥락과 상황 속에 어떤 양(수)이 단위화 되어 있다는 것을 명시적 언어로 표현하는 것을 의미한다.

언어로 명시적으로 드러내기 위해 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

첫째, 단위화를 명시적 언어로 드러내기 위해서 기

준이 되는 것은 최소한 형식불역의 원리를 따라야 할 것이다. 형식불역의 원리는 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지도록 수와 연산 및 관계를 확장하는 것을 의미한다(Woo, 1998). 즉, 단위화를 언어로 명시화하기 위해서는 기존의 대수 구조와 모순이 없어야 하고 자연수뿐만 아니라 분수(유리수)체계에서도 확장이 가능해야 할 것이다.

둘째, 간결성과 편의성 즉, 간편성을 고려해야 할 것이다. 만약 형식불역의 원리에 의한 조건을 만족하더라도 표현 방법이 간결하지 못하고 복잡하다면 오히려 오개념을 형성시킬 수 있다. 또한 다양한 수 체계와 연산에 적용하는데 편리하게 접근할 수 있어야 할 것이다.

다음은 본 연구자가 명시적 언어로 단위화 드러내기를 한 예이며 형식 불역의 입장과 간편성의 입장에서 다음의 예들이 합당한지 살펴보았다.

첫째, a 가 임의의 유리수일 때 a 가 단위화 되어 있다는 것을 $\frac{a}{1}$ 로 표현할 수 있다. $\frac{a}{1}$ 은 a 와 대수적으로 같으므로 대수 구조와 모순이 없으므로 최소한 형식불역의 원리는 만족한다. 그런데 $\frac{a}{1}$ 은 분수의 의미를 정확하게 이해하지 못하는 초등학교 저, 중학년 학생들이 수식으로 쓰기에는 간편성이 떨어진다.

둘째, a 가 임의의 유리수 일 때, a 가 단위화 되어 있다는 것을 (a) 로 표현하기이다. (a) 는 a 가 하나의 묶음의 의미를 시각적으로 전달하기에는 유용하여 간편성을 확보하고 있고 곱셈에서 $(3) \times 5 = 15$ 로 표현할 때는 문제가 없으나 $(3) \div 5 = \frac{3}{5}, \frac{(3)}{5}, (\frac{3}{5})$ 이 가능하며 $3 \div (5) = \frac{3}{5}, \frac{3}{(5)}, (\frac{3}{5})$ 가 가능한데 기존의 대수 구조의 형식과 잘 맞지 않아 학생들이 $()$ 표현의 혼동을 가져올 가능성이 있다.

셋째, a 가 임의의 유리수 일 때, a 가 단위화 되어 있다는 것을 $a \times 1$ 로 표현하기이다. a 와 $a \times 1$ 는 대수적으로 같은 의미이므로 형식 불역의 원리를 만족한다. 또한, 초등학생들이 곱셈을 배울 때 $2 \times 1 = 2$ 가 된다는 것을 이미 배웠고 2×1 은 2개짜리가 하나(한 묶음)라는 개념에 익숙하다는 장점이 있고 $2 \times 3 = 2 \times 1 \times 3$ 으로 표현하면 2×1 짜리가 3개 있다는 의미로 쉽게 받아들이므로 편의성이 있으나 앞에서부터 문맥을 해석하면 2개짜리 1묶음이 3개로 해석해

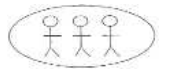
야하는데 곱셈은 교환 법칙이 성립하므로 $2 \times 1 \times 3$ 을 $2 \times 3 \times 1$ 로 해석하여 3개짜리 1묶음이 2배로 생각할 수 있으므로 이러한 혼란을 방지하기 위해 $(2 \times 1) \times 3$ 로 표현해야하는 경우가 발생한다.

5. 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기의 의미

가. 단위화 드러내기의 명시화

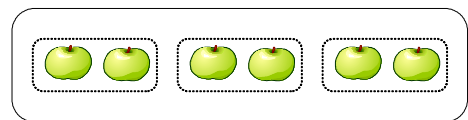
단위화 드러내기는 폴라니가 제시한 암묵적으로 존재하는 단위화에 대한 지식을 명시적으로 드러내서 초점화하여 개념 습득을 돕고자 하는 것이다. 이를 위하여 본 연구자는 형식 불역의 원리와 간편성에 근거하여 단위화 드러내기를 다음과 같이 명시화하고자 한다. 단위화 드러내기는 a 가 유리수 일 때 다양한 맥락과 상황 속에서 a 가 단위화되어 있다는 것을 드러내기 위해 a 를 $a \times 1$ 로 표현하는 것이다. 다음 표는 단위화 드러내기를 이용하여 단위를 표현한 것이다.

<Table 1> The expression of unit by revealing unitizing

meaning of unit	figure	unit expression
3 one unit		3(people)
one unit with 3		3×1 (people)

나. 자연수 곱셈과 나눗셈에서의 단위화 드러내기의 의미

자연수의 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기는 a, b, c 가 자연수이며 a 가 곱셈과 나눗셈의 맥락과 상황 속에서 단위화되어 있다면 곱셈에서 단위화 드러내기는 $a \times 1 \times b = c$ 이며 이 식이 성립할 때 포함제 상황은 $b = c \div a \times 1$ 이고 등분제 상황은 $a = c \times 1 \div b$ 이다.



[Figure 4] Multiplication and division situation of natural numbers

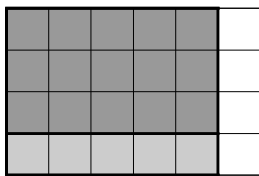
첫째, 위 그림에서 자연수의 곱셈에서 단위화 드러내기는 $2 \times 1(\text{단위화}) \times 3 = 6$ 이 된다. 이 때 2는 하나이면서 전체로 볼 필요가 있으며 단위화 드러내기를 하면 2×1 이 된다. 문제 상황으로 표현하면 사과 2개씩 3사람에게 나누어 주면 사과 몇 개가 필요한가가 된다.

둘째, 나눗셈은 곱셈과 역연산 관계에 있으므로 위 그림에서 3(연산자)을 알고 싶으면 $6 \div 2 \times 1(\text{단위화}) = 3$ 이 되고 이 상황을 문제 상황으로 표현하면 사과 6개를 2개씩 나누면 몇 사람에게 똑같이 나누어 줄 수 있나?로 표현할 수 있다. 이 상황은 나눗셈의 포함제 상황이다.

셋째, 2×1 을 알고 싶으면 $6 \div 3 = 2 \times 1$ 이 되고 문제 상황으로 표현하면 사과 6개를 3명에게 똑같이 나누어 주면 한 사람이 몇 개씩 가질 수 있나?로 표현할 수 있다. 이 상황은 나눗셈의 등분제 상황이다. 그런데 이 상황에서 6개를 전체이면서 1개의 단위로 3등분한 것의 1개를 의미하므로 6개를 1개로 보는 과정, 즉 단위화가 필요하다. 따라서 등분제의 단위화 드러내기는 $6 \times 1(\text{단위화}) \div 3 = 2$ 로 표현할 수 있다.

다. 분수의 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기

분수의 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기는 a, b, c, d, 가 자연수이고 $\frac{b}{a}$ 가 곱셈과 나눗셈의 맥락과 상황 속에서 단위화되어 있다면, 곱셈 상황에서 단위화 드러내기는 $\frac{bd}{ac} = \frac{b}{a} \times 1(\text{단위화}) \times \frac{d}{c}$ 이며, 이 식이 성립한다면 포함제 상황은 $\frac{d}{c} = \frac{bd}{ac} \div \frac{b}{a} \times 1$ 이고 등분제 상황은 $\frac{b}{a} = \frac{bd}{ac} \times 1 \div \frac{d}{c}$ 이다.



[Figure 5] Multiplication and division situation of fraction

첫째, 위 그림에서 분수의 곱셈에서 단위화 드러내기는 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times 1(\text{단위화}) \times \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$ 이 된다. 이 때 $\frac{5}{6}$ 는

전체이면서 하나로 보는 사고(단위화)가 필요하며 단위화 드러내기를 하면 $\frac{5}{6} \times 1$ 이 된다.

둘째, 나눗셈은 곱셈과 역연산 관계에 있으므로 위 그림에서 $\frac{3}{4}$ (연산자)을 알고 싶으면 분수의 나눗셈 식으로 $\frac{15}{24} \div \frac{5}{6} \times 1(\text{단위화})$ 이 된다. 이 상황을 문제 상황으로 표현하면 전지 $\frac{15}{24}$ 장은 전지 $\frac{5}{6}$ 장의 몇 배인가로 나타낼 수 있으며 이 상황은 분수의 포함제 나눗셈 상황이다. 이 상황의 문제를 해결하면 $\frac{15}{24} \div \frac{5}{6} \times 1 = \frac{15}{24} \div \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{15}{24} \div \frac{20}{24} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ 이 된다.

셋째, 마찬가지로 곱셈은 나눗셈과 역연산 관계이므로 $\frac{5}{6} \times 1$ 즉 $\frac{5}{6}$ 를 알고 싶으면 분수의 나눗셈 식으로 $\frac{15}{24} \div \frac{3}{4}$ 이 된다. 상황을 문제 상황으로 표현하면 처음 전지의 $\frac{3}{4}$ 을 했더니 전지 $\frac{15}{24}$ 이 되었다. 처음 전지의 양은 얼마인가가 되는데 문제 상황을 표현할 수 있다. 이때의 상황은 분수의 나눗셈의 등분제 상황이다.

라. 곱셈과 나눗셈의 단위화 드러내기 일반화
곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기의 일반화 결과는 다음과 같다.

a, b, c가 유리수이며 a가 곱셈과 나눗셈의 맥락과 상황 속에서 단위화되어 있다면 곱셈에서 단위화 드러내기는 $a \times 1 \times b = c$ 이며 이 식이 성립할 때 포함제 상황은 $b = c \div a \times 1$ 이고 등분제 상황은 $a = c \times 1 \div b$ 이다.

6. 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기의 역할

곱셈과 나눗셈의 문제 상황에 있는 단위에 대한 인식을 초점화하여 문제 상황을 이해하는데 도움을 주어 아래 <Table 2>와 같이 문제 상황을 형식화하는 중간과정으로서의 역할을 한다.

<Table 2> General process of lessons (Baek, 2004)

Lesson type	Lesson process
General lessons	Concept → Connection → Formalization
Revealing unitizing lesson	Concept → Connection → Connection with Revealing unitizing → Formalization

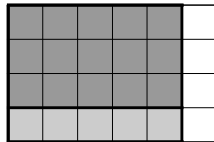
다음은 일반적인 수업 단계와 단위화 드러내기 수업 단계를 비교한 예시이다.

상황 : 민준이는 종이 전지의 $\frac{5}{6}$ 장을 가지고 있었는데 그 중 $\frac{3}{4}$ 을 진희에게 주었다면 민준이가 진희에게 준 전지의 크기는 얼마인가?

<일반적인 수업 단계>

개념 단계
문제 상황을 인식하는 단계

↓
연결 단계



직사각형 모델을 이용하여 지도

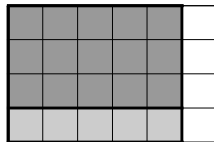
↓

형식화 단계

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} \text{로 표현하여 수식으로 형식화}$$

<단위화 드러내기 수업 단계>

연결 단계



직사각형 모델을 이용하여 지도

↓
단위화 드러내기를 통한 연결 단계
직사각형 모델을 $\frac{5}{6} \times 1(\text{단위화}) \times \frac{3}{4}$ 로 표현하여
단위화를 드러내는 중간 단계가 필요
↓
형식화 단계
 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ 로 표현하여 문제 상황을 수식으로
형식화

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 설계, 절차, 대상

본 연구는 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기의 효과와 학생들의 이해를 알아보는 것이다. 이를 위해 연구에 부합하는 면담 과제를 설정하고 지도 대상을 선정하였으며 심층 면담, 활동지 분석, 비디오 녹화자료 분석, 교수 실험을 통해 ‘자료의 다각화(triangulation of materials)’를 적용하여 질적 의미를 분석하였다. 질적 사례 연구는 의도하지 않은 영향이나 단순한 수치 이면에 나타나는 사실들을 찾을 수 있는 장점이 있으므로(Patton, 2002) 이 연구방법을 적용하였다.

본 연구가 비록 사례 연구에 바탕을 둔 질적 연구방법을 사용하여 모든 학생들에게 적용하기는 어렵지만 본 연구의 일반화 가능성을 열어 두기 위해 학업 성적이 보통인 학생뿐만 아니라 학업 수준이 다양한 학생들의 반응도 알아보고자 하였다. 이를 위해 연구자의 접근이 용이한 서울특별시에 소재한 Y초등학교 6학년 3명을 대상으로 학업 성취도가 상, 중, 하인 어린이 각 1명씩 연구 주제에 크게 벗어나지 않으면서도 의도한 자료를 얻을 수 있도록 의도적 표집을 실시하였다(Patton, 2002).

연구 절차는 <부록 1>과 같다.

2. 검사 도구

본 연구는 단위화 드러내기를 통해 자연수의 곱셈과 나눗셈, 분수의 곱셈과 나눗셈을 학생들이 어떻게

이해하는지 면담을 통해 알아보려고 하였다. 이를 위해 단위화와 곱셈과 나눗셈 관련한 선행연구(Beak, 2004; Kwon & Kim, 2009; Shim, 2014; Lee, & Pang, 2014; Kim & Whang, 2012; Kim, 2009; Yim et al., 2005; Choi, 2010; Shin & Lee, 2013; Kim & Park, 2013)와 문헌검토(Ma, 1999; Lamon, 2012)를 통해 초등학교 학생들의 자연수와 분수의 곱셈과 나눗셈의 학습 단계와 각 학습 단계별로 단위화와 관련한 지도 요소를 추출하여 면담 과제를 <부록 2>와 <부록 3>과 같이 선정하였다. 수학 교육전문가와 현장 교육자의 검증을 거쳐 예비 면담 과제를 선정하였고 6학년 학생 3명을 통해 예비 면담을 실시한 결과를 바탕으로 면담 과제를 수정, 보완하여 최종 면담 과제를 선정하였다.

3. 자료수집 및 분석 방법

가. 자료 수집

학생의 반응을 분석하기 위해, 심층 면담을 실시하였으며 면담과정을 비디오로 모두 녹화 하였고, 실제 면담 과정에서 작성한 학습자의 활동지, 비디오 녹화자료, 연구자의 관찰 일지, 에피소드 등의 자료를 수집하였다.

나. 자료 분석 방법

자료의 분석은 자료의 수집과 동시에 이루어졌다. 이전 면담 자료의 수집을 바탕으로 면담 후 자료를 바로 분석하여 이 후 면담활동의 질문방향을 바르게 설정할 수 있었으며, 면담 중에 일어나는 시행착오를 줄일 수 있었다. 이러한 반복적, 지속적인 분석 과정을 통해 타당한 결과를 얻을 수 있는 것이 질적 연구 방법에서 추구하는 방법이며, 본 연구에서도 이러한 방향으로 자료의 수집과 함께 분석을 반복적으로 하여 결과의 타당성을 얻고자 노력하였다. 또한 연구자가 내린 분석 결과를 수학 교육전문가와 현장 교육자의 검증을 거치는 ‘연구자 다각화(investigator triangulation)’방법을 활용하여 분석의 신뢰도와 타당도를 높일 수 있었다.

IV. 연구결과

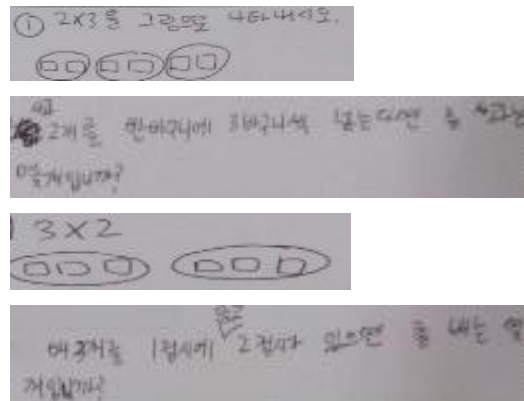
본 연구는 곱셈과 나눗셈에서 단위화 드러내기의 효과와 학생들의 이해를 알아보려고 질적 연구 방법을 사용하여 분석하였다.

1. 곱셈과 나눗셈의 이해

곱셈과 나눗셈에서의 학생들의 이해 실태를 살펴 보았고, 학생들이 곱셈과 나눗셈 상황을 잘 이해하지 못했을 때 단위화 드러내기를 통한 지도를 통해 단위화 드러내기의 효과와 학생들의 이해를 살펴보았다.

가. 자연수의 곱셈 상황에의 이해

‘문제 : 2×3 , 3×2 을 그림(직관 모델)과 문제 상황(의미론적 구조)으로 표현할 수 있는가?’를 통해 자연수의 곱셈 상황에서 학생들은 단위화 드러내기를 하지 않더라도 [Figure 6]과 같이 그림과 문제 상황으로 곱셈의 의미를 잘 표현할 수 있었으며 묶음이라는 개념을 통해 단위화 개념을 인식하고 있었다.

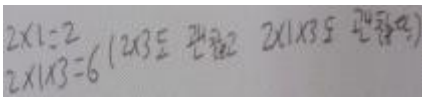
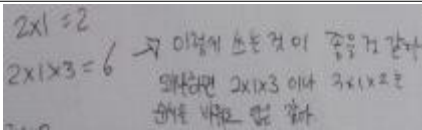
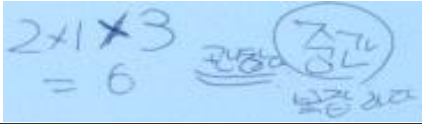


[Figure 6] The understanding of multiplication of natural number

단위화 드러내기를 통해 문제 상황을 <Table 1>과 같이 표현해 보고 $\times 1$ 을 중간에 더 써 주는 것에 대해 <에피소드1>과 같이 학생들의 반응을 확인하였다. 확인 결과 학업 수준이 상인 학생은 단위화 개념을 이미 형성하고 있었으므로 단위화를 드러내는 것에 대해 불필요하게 생각하였으나 문제 상황을 좀 더 정확하게 이해하려면 단위화 드러내기가 필요하다고 하였고, 단위화에 대한 개념을 정확하게 형성하지 못한 학업 성취도가 중, 하 학생은 문제 상황과

형식적 지식을 연결하는 중간 단계로서 단위화 드러내기의 필요함을 인정하였으나 곱셈식에 $\times 1$ 을 중간에 더 써 주는 것에는 번거롭게 생각했다.

<Table 3> Students' responses about revealing unitizing

Student	Whether the expression $2 \times 1 \times 3$ represents the 2×3 better?
A	
B	
C	

<에피소드 1>

연구자 : $2 \times 1 \times 3$ 로 쓰는 것이 2×3 으로 쓰는 것보다 문제 상황을 잘 표현하는가?

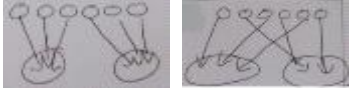
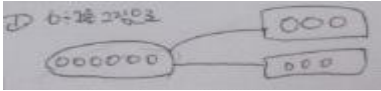
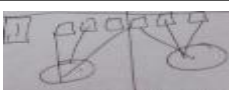
학생C : 조금 괜찮을 것 같다. 그런데 좀 복잡하다. 중간정도... 단순히 2×3 으로 쓰는 것이 좋다.

학생A : 둘 다 괜찮은데 $2 \times 1 \times 3$ 로 표현하는 것이 정확한 것 같다. 어려운 문제가 나올 때는 $2 \times 1 \times 3$ 로 해야 정확하다.

나. 자연수의 나눗셈 상황에서의 이해

자연수의 나눗셈 상황에서 학업 수준이 상, 중, 하 모든 학생이 나눗셈을 등분제로만 인식하고 있었으며 포함제 상황은 잘 인식하지 못하였다. 이러한 사실은 학생들은 나눗셈을 대부분 등분제(82%)로 이해하고 있다는 Kim & Whang(2008)의 연구와 유사하였다. 이를 의도적으로 <에피소드 2>와 같이 포함제 상황을 제시한 후에야 포함제 상황을 인식할 수 있었다.

<Table 4> Students' understanding about the division of natural number

Student	Can students express $6 \div 2$ with 2 different figures?
A	
B	
C	

<에피소드 2>

연구자 : 사과 6개를 2개씩 나누어 주면 몇 사람에게 나누어 줄 수 있나?

학생들 : 3 사람입니다.

연구자 : 이 상황을 나타내기 위해 동그라미 6개를 그리고 2개씩 묶어 보세요. 그리고 동그라미를 사과라고 생각하면 사과 6개를 2개씩 나누어 주면 몇 사람에게 나누어 줄 수 있나요?

학생들 : 3사람

연구자 : 이 그림도 어떤 상황으로 생각할 수 있나요?

학생A : 6 나누기 2

연구자 : 선생님이 내 준 문제도 $6 \div 2$ 가 되는가?

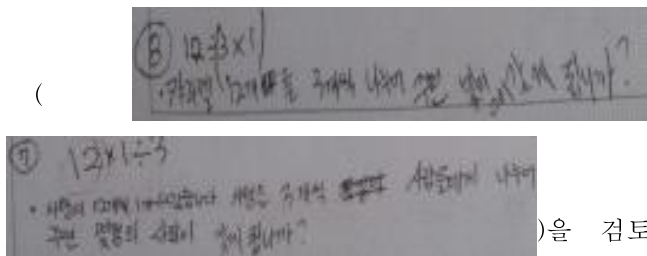
학생들 : 예, 맞아요.

그리고 자연수의 나눗셈을 <에피소드 3>과 같이 $12 \div 3$ 을 단위화 드러내기를 통해 포함제 상황(제수를 단위화 하여 나누는 것)과 등분제 상황(피제수를 단위화하여 나누는 것)을 명확히 구분하여 지도를 하였다. 지도 결과 [Figure 7]과 [Figure 8]과 같이 $10 \div 2$ 도 나눗셈 식에 단위화 드러내기($\times 1$)를 표현하여 그 의미를 명확하게 구분할 수 있었다.

<에피소드 3>

연구자 : $\times 1$ 을 이용해서 문제 상황을 정확하게 알 수 있도록 하려고 합니다.

연구자 : 학생B가 해결한 것



하겠습니다. $12 \div 3 \times 1$ 식에 대해 3개씩 묶어서 나누어 준다는 의미는 맞았는데 $12 \times 1 \div 3$ 식도 똑같이 3개씩 나누어 주었네요. 이 식은 12개를 3으로 어떻게 하라는 뜻인가요?

학생들 : 똑같이 나눈다는 뜻입니다.

연구자 : 예, 똑같이 나눈 것 중에 1개를 의미합니다.

연구자 : 3으로 똑같이 나눈다는 의미를 다시 생각해 보겠습니다. 사과 12개가 있는데 3사람에게 똑같이 나누어 주면 한 사람당 몇 개입니까?

학생B : 4개입니다.

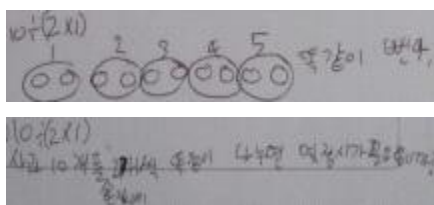
연구자 : $12 \times 1 \div 3$ 식은 12개를 1개의 묶음으로 보고 이것을 3등분으로 똑같이 어떻게 하라는 뜻인가요?

학생들 : 나눈다는 뜻입니다.

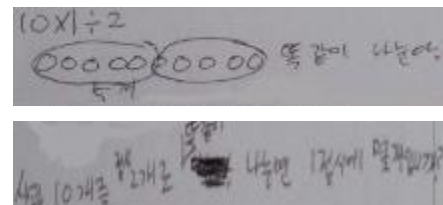
연구자 : 그러면 여러분이 지금까지 활동한 내용을 생각하면서 나눈다는 뜻은 어떤 의미가 있을까요?

학생들 : 나눈다는 의미는 똑같은 숫자를 빼주는 경우와 똑같이 등분한다는 의미가 있습니다.

연구자 : 그러면 $10 \div (2 \times 1)$ 와 $10 \times 1 \div 2$ 식을 나눗셈의 2가지 의미가 들어가게 그림으로 그리고 문제 상황으로 만들어 보세요.



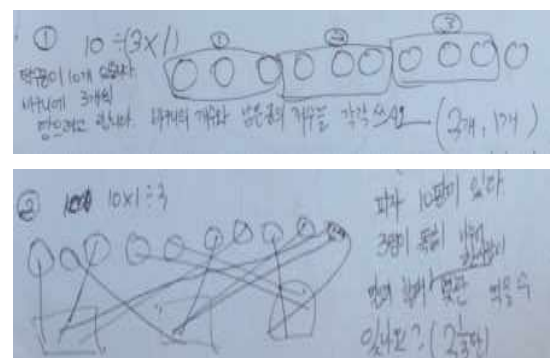
[Figure 7] The understanding of quotative division through revealing unitizing



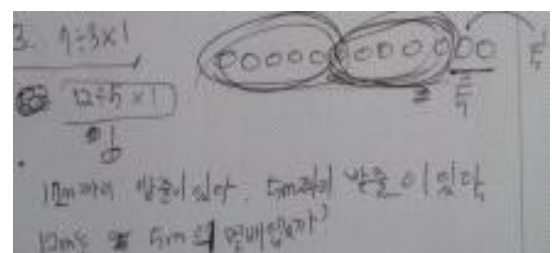
[Figure 8] The understanding of partitive division through revealing unitizing

나누어떨어지지 않는 자연수의 상황에서 학생들은 단위화 드러내기를 통해 [Figure 9]와 같이 포함제와 [Figure 10]과 같이 등분제의 의미를 명확히 구분할 수 있었다.

특히 포함제의 경우 단위화 드러내기를 통하여 [Figure 10]과 같이 배 개념을 활용하여 학습자가 자연스럽게 묶이 분수(연속량)인 경우까지 확장하여 이해할 수 있었다.



[Figure 9] The understanding of quotative & partitive division of indivisible natural numbers



[Figure 10] The understanding of quotative division of continuous quotient

다. 분수의 곱셈 상황에서의 이해

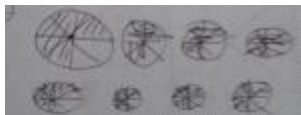
분수의 곱셈 상황에서 (분수)×(자연수)의 과제 $\frac{3}{4} \times 8$ 에 대해 학생들은 단위화 드러내기를 하지 않더라

도



과 같이 자연스럽게 분수에 동수누가를 하여 의미를 잘 구성하였다.

반면 (자연수)×(분수)의 과제 $8 \times \frac{3}{4}$ 에 대해 학업 수준인 상인 학생은 몇 분의 몇 배 개념을 인식하여 의미를 잘 구성하였으나 학업성적이 중, 하인 학생은



(학생 A),



(학생 B)와 같이 $\frac{3}{4}$ 에 곱

중하여 의미를 정확하게 구분하지 못했다.

이를 단위화 드러내기 식($8 \times 1 \times \frac{3}{4}$)을 제시해 주고 <에피소드 4>과 같이 단위화 드러내기를 통해 단위화 개념을 인식시킨 후에는 학생들이 가지고 있는 분수의 의미(부분-전체)와 연결한 후 의미를 구성하도록 하였는데 학업 성적이 중, 하인 학생도 자연스



럽게 과 같이 의미를 구성할 수 있었다.

<에피소드 4>

연구자 : ($8 \times 1 \times \frac{3}{4}$ 식을 제시하며) 그림으로 나타낼 수 있겠니?

학생A,B : 잘 모르겠습니다. 좀 더 힌트를 주세요.

연구자 : 8을 공 8개로 표현해 보고 8×1 은 하나의 덩어리로 묶어 보고 그것의 $\frac{3}{4}$ 을 만들어 보세요.

학생A,B : 8의 $\frac{1}{4}$ 은 얼마입니까?

학생B : 2개입니다.

학생C : 왜 2개예요? 아하! 2개입니다.

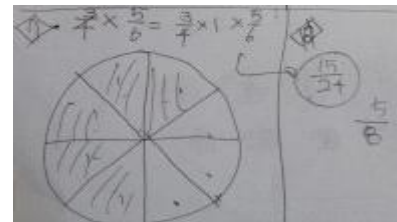
연구자 : 8을 $\frac{1}{4}$ 씩 묶어 보세요. $\frac{1}{4}$ 씩 3번 묶어 보면 몇 개일까요?

학생C : 아하! 그러니까 8의 $\frac{3}{4}$ 이 6개구나!

연구자 : 학생B도 알 수 있겠니?

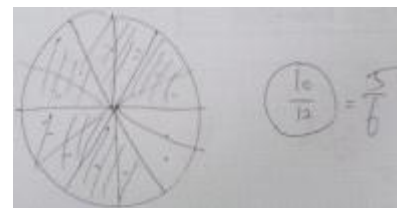
학생B : 예, 잘 알겠습니다.

(분수)×(분수)에서 학생들은 피승수의 분자와 승수의 분모가 약분이 되는 경우에는 <Figure 11>과 같이 단위화 드러내기를 통해 의미를 잘 구성할 수 있었다.



[Figure 11] The understanding of multiplication of fraction

그러나, 서로 약분이 잘 되지 않는 분수의 곱셈은 단위화 드러내기를 하더라도 아래 [Figure 12]와 같이 의미를 구성하는 것을 어려워했는데 그 이유는 등분할의 어려움 때문이었다.



[Figure 12] The difficulties on division of equal part

그래서 <에피소드 6>과 같이 직사각형 모델을 제시한 후에 $\frac{5}{6}$ 의 $\frac{3}{4}$ 을 찾아 $\frac{15}{24}$ 의 의미를 [Figure 13]과 같이 직관적으로 구성할 수 있었다. 이는 Beak(2004)가 분수의 곱셈에서 단위를 재 개념화할 수 있는 지도 방법을 적용하여 지필 알고리즘을 사용하지 않고도 비형식적으로 문제를 해결한 결과와도 일치하였다.

<에피소드 6>

연구자 : $\frac{5}{6}$ 를 띠모양으로 만들어 보세요.

학생B : (그림과 같이) 먼저 띠를 6등분한 후 5를

표시하였다.

연구자 : 그 중에 $\frac{3}{4}$ 을 표시할 수 있겠어요.

학생B : 잘 못하겠어요. 힌트를 주세요.

연구자 : 가로로 똑같이 4등분 해 보세요.

학생B : 와! 그런 방법이 있었구나!(그림과 같이 $\frac{5}{6}$ 를 하나로 생각하여 4등분한 후 그 중에 3에 해당하는 부분에 색칠을 한다.)

연구자 : 전체는 몇 등분 하는지 알 수 있겠어요?

학생B : 4등분...

연구자 : 전체 모양을 몇 등분하는가요?

학생B : 아하! (등분한 숫자를 세며) 24등분합니다.

연구자 : 그러면 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 은 얼마입니까?

학생B : $\frac{15}{24}$ 입니다.

연구자 : $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ 의 계산의 의미가 그림과 같은지 알 수 있겠어요?

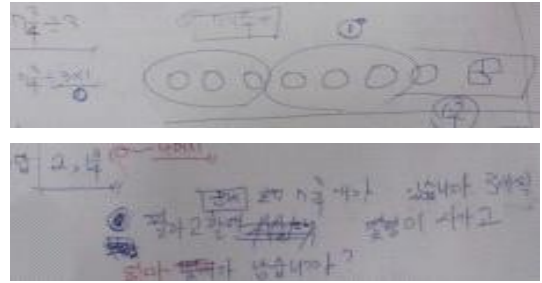
학생B : 예, 잘 알겠습니다.



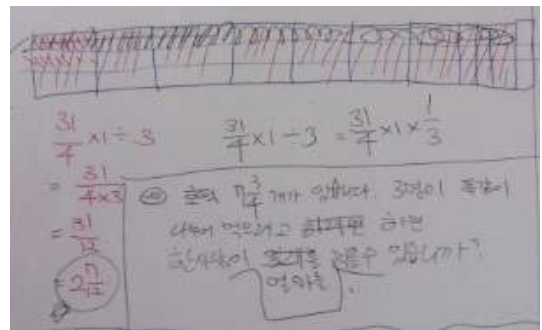
[Figure 13] The understanding in multiplication of fraction through rectangular model

라. 분수의 나눗셈 상황에서 이해

분수의 나눗셈 상황에서 (분수)÷(자연수)는 단위화 드러내기를 통해 포함제([Figure 14])와 등분제([Figure 15])를 구분하여 의미를 구성하였으나 이는 이전 면담을 통해 나눗셈의 단위화 드러내기가 충분히 학습된 결과로 볼 수 있었다. 특히 활동을 통해 [Figure 16]등분제 나눗셈에서 제수는 분수의 곱셈으로 바꾸면 $\frac{1}{\text{제수}}$ 이 된다는 것을 직관적으로 이해할 수 있었다.

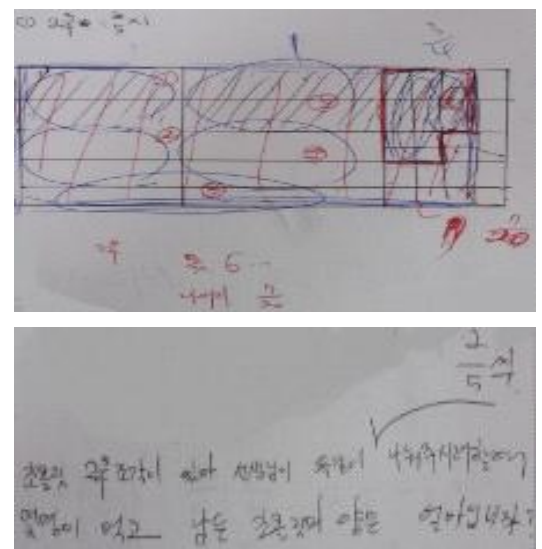


[Figure 14] Quotative division problem solving on (Fraction)÷(Natural number)



[Figure 15] Partitive division problem solving on (Fraction)÷(Natural number)

(분수)÷(분수)는 아래 [Figure 16]과 같이 포함제 문제 상황만 단위화 드러내기를 통해 의미를 구성할 수 있었다.



[Figure 16] The understanding of quotative division through revealing unitizing

[Figure 16]의 경우는 몫이 이산량이므로 나머지가 생기기 때문에 몫이 연속량인 문제를 만들고 해결하라고 했다. 그래서 학생에게 몫이 연속량이 되는 분수의 나눗셈 문제를 만들고 문제를 풀어 보라고 했는데 [Figure 17]과 같이 처음에는 나눗셈을 절차적(역수의 곱)으로 해결을 하였으나 문제의 의미 그대로 해결하라고 했더니 포함제 나눗셈의 의미를 이용하여 해결하였다.

[Figure 17] The understanding of quotative division for the continuous quotient

(분수)÷(분수)에서 등분제 상황은 학생들이 그 예를 찾기 어려워하여 단위비율 결정 맥락의 상황은 자연수의 등분제와 맥을 같이 한다는 임재훈 외 (2005)의 연구를 토대로 분수의 나눗셈을 단위비율 결정 맥락을 예로 들어 등분제 상황을 제시하였다. 그리고 아래 [Figure 18]와 같이 자연수의 등분제 상황으로 문제를 해결하였다.

[Figure 18] The division of partitive natural number

하지만 단위비율 결정 맥락의 상황을 분수의 나눗셈 상황으로 제시하였는데 학생들이 <에피소드 7>과 같이 의미를 구성하는데 어려워하였고 [Figure 19]과 같이 포함제의 나눗셈의 의미로 문제를 해결하였다.

<에피소드 7>

연구자 : $2\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} \times 1$ 는 $2\frac{3}{4}$ 속에 $\frac{2}{5}$ 이 몇 번 들어가는

지 알아보면 되는데 $2\frac{3}{4} \times 1 \div \frac{2}{5}$ 는 어떻게 문제를 해결할 수 있나요?

학생B : 이것도 $2\frac{3}{4}$ 에서 $\frac{2}{5}$ 을 몇 번 빼주면 되지 않을까요?

연구자 : $2\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} \times 1$ 에서 나눗셈의 의미가 $\frac{2}{5}$ 를 몇 번 빼주는 것이잖아요?

학생B : (난감해 하는 표정을 지으며) 아! 나머지가 없는 것으로...

연구자 : 나누기의 의미 중에 몇 등분하는 것도 있잖아요?

학생B : 예.

연구자 : 2등분으로는 나눌 수 있겠어요?

학생B : 예. 할 수 있어요.

연구자 : 그러면 $\frac{2}{5}$ 등분으로 나눌 수 있겠어요?

학생B : (머리를 긁적이며) 허... 할 수 없어요.

연구자 : 잘 생각할 수 없죠.

[Figure 19] The partitive problem solving for (fraction)÷(fraction)

등분제 상황을 좀 더 분석적으로 살펴보면 등분제 나눗셈은 분자가 1인 분수의 곱셈으로 해석될 수 있는데 나누는 수가 분수이므로 분수의 곱셈으로 해석하면 분모가 분수가 되어 학생들이 머릿속으로 의미를 연결은 시키기에는 어려움이 있기 때문으로 보였다. 그래서 <에피소드 8>와 같이 단위화 드러내기와 제수를 분할, 반복에 의한 조작으로 연산을 치환하여 생각하도록 하여 [Figure 20]과 같이 의미를 구성할 수 있었다. 이는 역연산 관계와 분할과 반복의 방법을 이용하면 분수의 등분제 나눗셈에도 해결할 수 있으며 뒤집어 곱한다는 원리도 단순한 형식적 조작

이 아니라, 구체적인 조작활동을 통해 이해할 수 있다는 Choi(2010)의 연구와 유사한 면이 있었다.

[Figure 20] The understanding of partitive division through partition and repeat

<에피소드 8>

연구자 : $2\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{11}{4} \div \frac{2}{5}$ 에서 $\frac{2}{5}$ 은 무엇과 무엇을 곱셈으로 나눌 수 있을까요?

학생B : ($\frac{11}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{11}{4} \div (2 \times \frac{1}{5})$ 로 표현한다.)

연구자 : $\frac{11}{4} \times 1$ 과 같이 $\frac{11}{4}$ 을 한 덩어리로 보고 $\frac{11}{4} \times 1 \div (2 \times \frac{1}{5})$ 에서 2를 먼저 계산해 볼까요?

학생B : ($\frac{11}{4} \times 1 \div (2 \times \frac{1}{5}) = \frac{11}{4} \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{5}$ 로 식을 쓴다.)

연구자 : $\frac{11}{4} \times \frac{1}{2} \times 1$ 와 같이 $\frac{11}{4} \times \frac{1}{2}$ 을 한 덩어리로 보고 $\frac{11}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 \div \frac{1}{5}$ 을 계산해 볼까요?

학생B : $\frac{11}{4} \times \frac{1}{2} \times 5$ 로 표현한다.

연구자 : $1 \div \frac{1}{5}$ 가 왜 5가 되죠?

학생B : (그림을 보여 주며) $\frac{1}{5}$ 은 1속에 5번 들어가기 때문입니다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 자연수의 곱셈 상황에서 곱셈의 의미를 정확하게 인식하기 위해서는 단위화 드러내기를 통해 단위화 개념을 학생들이 명확하게 인식하도록 할 필요가 있다. 따라서 곱셈을 단순히 (숫자)×(숫자)로

인식하고 있는 학생들에게 단위화 드러내기를 통해 (어떤 양)×1=(단위량)이 된다는 것을 명시적으로 드러내고 곱셈은 (어떤 양)×1×(연산자)=(새로운 양)이 된다는 것을 명확히 인식 시킬 필요가 있다.

둘째, 문제 상황과 형식적 지식을 연결하는 중간 단계로서 단위화 드러내기를 통해 포함제와 등분제에 대해 명확히 구분하여 지도할 필요가 있다. 본 연구 결과 학생들은 나눗셈을 단순히 등분제 이해하고 있었는데 의미를 명확히 구분하기 위해 단위화 드러내기를 통해 포함제는 (피제수)÷(제수)×1로 등분제는 (피제수)×1÷(제수)로 인식 시킬 필요가 있다.

셋째, 분수의 곱셈 상황에서 형식화된 절차로 이해하고 있는 학생들에게 단위화 드러내기와 부분-전체로서의 분수의 의미를 연결하여 지도할 필요가 있다. 학생들은 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로 약분이 되지 않은 상황에서 학생들이 의미를 구성하기 어려워하는데 이는 등분할의 어려움에 기인하는 것으로 직사각형 모델을 활용하여 분수의 부분-전체로서의 의미와 단위화 드러내기를 통해 지도하면 자연스럽게 의미를 구성할 수 있을 것으로 기대된다.

넷째, 분수의 나눗셈 포함제와 등분제 개념을 정확하게 구분하지 못하는 경우 단위화 드러내기를 통해 두 상황을 명확히 구분하여 이해할 필요가 있으며, 특히 분수의 등분제 나눗셈은 단위화 드러내기와 분할 반복의 이중 연산으로 치환하여 의미를 구성할 필요가 있다.

본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서 맥락과 상황속에서 단위화를 명시적으로 드러내기 위해 단위화 드러내기를 a가 유리수 일 때 $a \times 1$ 로 표현하였다. 그런데 이러한 표현 방법으로 수식을 표현할 때에는 대수적 관점에서 등식이 성립하기 때문에 모순이 없지만 표기법의 관점에서 $a \times 1$ 로 표현하면 자칫 2차원(면적)을 표현하는 방식과 유사하여 오개념을 형성시킬 요소가 다분히 존재한다. 따라서 대수적 조건을 만족하면서도 표기법적으로 모순이 없는 표현 방식에 대한 연구가 좀 더 이루어져야 할 것이다.

둘째, 본 연구는 분수의 나눗셈에 대한 형식적 조작이 가능한 형식적 조작기에 초기에 있는 6학년 학

생을 대상으로 연구를 진행하였는데 구체적인 조작기에 있는 5학년, 4학년, 3학년 학생들을 대상으로 질적 연구를 더 진행할 필요가 있다.

참고 문헌

- Beak, S. S. (2004). A development of instructional method for the formalized algorithm through informal knowledge in teaching multiplication and division of fraction. Korea National University of Education Ph. D. Dissertation.
- Kang, W., etc. (1999). The understanding of teaching elementary mathematics. Seoul: Yansowon.
- Choi, K. B. (2010). A Study on a Fraction Instruction Via Partitioning and Iterating Operations. Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics 12(3), 411-424.
- Kim, K. M., Whang, W. H. (2011). An Analysis of the Relationship Between Students' Understanding and their Word Problem Solving Strategies of Multiplication and Division of Fractions. J. Korea Soc. Math 50(3), 337-354.
- Kim, K. M., Whang, W. H. (2012). An Analysis of Students' Understanding of Operations With Whole Numbers and Fractions. J. KSME(Math Edu) 51(1), 21-45.
- Kim, M. W. (2009). Teaching Multiplication & Division of Integers and Fractions through Contextualization. Konkuk University Ph. D. Dissertation.
- Kim, J. H., & Park, K. S. (2013). A Study on Extension of Division Algorithm and Euclid Algorithm. Journal of Educational Research in Mathematics 23(1), 17-35.
- Kwon, M. S., & Kim, N. G. (2009). A Study on the Solving Proportion Problems of Mathematics Textbooks and Proportional Reasoning in 6th Graders. Korea Society of Elementary Mathematics Education 13(2), 211-229.
- Lamon, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (3th ed). New York: Routledge.
- Lee, J. Y., & Pang, J. S. (2014). Sixth Grade Students' Understanding on Unit as a Foundation of Multiple Interpretations of Fractions. Journal of Educational Research in Mathematics 24(1), 83-102.
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United states. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nam, J. Y. (2008). The construction of mathematical knowledge. Seoul: Kyongmoonsa.
- Patton, M. Q. (2002). Qualitative research & Evaluation methods. Thousand Oak, CA: Sage Publications
- Shin, J., & Lee, S. J. (2013). Modification of unit-Segmenting Schemes for division problems involving fractional quantities. Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics 14(2), 191-212.
- Shim, J. B. (2014). A Study on the Teaching Methods of 4th Graders' representation and Comparison of Fractions through the Unitizing. Korea National University of Education Master's Thesis
- Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. Journal of Mathematical Behavior, 20, 267-307.
- Woo, J. H. (1998). The educational base of school mathematics. Seoul: Seoul National University Press.
- Yim, J. H., Kim, S. M., & Park, K. S. (2005). Different Approaches of Introducing the Division Algorithm of Fractions: Comparison of Mathematics Textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan. Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics 7(2), 103-121.

<부록 1> 연구 절차



<부록 2> 자연수와 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 면담 초점

면담의 초점	
◎ 그림과 문제 상황으로 표현할 수 있는가?	- 학생들의 곱셈과 나눗셈에 대한 이해 실태 파악
◎ 식을 통해 단위화 드러내기를 할 때 문제 상황을 보다 근본적으로 표현하는가?	- 단위화 드러내기 식이 문제 상황과 형식적 지식을 연결하는지 파악
◎ 단위화 드러내기 식을 그림이나 문제 상황으로 표현할 수 있는가?	- 단위화 드러내기 식을 통해 학생들이 의미를 구성할 수 있는지 파악

<부록 3> 분수와 나눗셈 주제에 따른 면담 초점

순서	주제	면담 과제
1	자연수의 곱셈	◎ 곱셈의 의미는 무엇인가?
2	자연수의 나눗셈	◎ 나눗셈의 의미는 무엇인가?
3	나누어떨어지지 않는 자연수의 나눗셈	◎ 단위화 드러내기를 이용하여 나머지가 생기지 않는 포함제 상황을 이해할 수 있는가?
4	분수의 곱셈	◎ 단위화 드러내기를 이용하여 분수의 곱셈에 대한 알고리즘을 이해할 수 있는가?
5	제수가 자연수인 분수의 나눗셈	◎ 분수의 나눗셈을 등분제와 포함제의 개념으로 이해할 수 있는가?
6	제수가 분수인 분수의 나눗셈	◎ 단위화 드러내기를 이용하여 분수의 나눗셈에 대한 알고리즘을 이해할 수 있는가?