

평면도형 높이에 대한 학생 이해도와 오류 유형

이광호* · 이현주 · 이주영 · 송윤오

한국교원대학교

Understanding and Error Types of the Height Concept in Plane Figures

Kwang-Ho Lee*, Hyun-Ju Lee, Joo-Young Lee, Yun-Oh Song

Korea National University of Education

<ABSTRACT>

The purpose of the research is to firstly, understand 5th graders' conceptions of heights in triangles and parallelograms. Secondly, analyze and categorize the frequently shown error types of the concept of heights in triangles and parallelograms. Thirdly, think about the cause and counterplan of the students' misconceptions of heights from the perspective of concept definition and concept image of Vinner model. 433 (19 classes) 5th graders of 6 elementary schools in Chungcheong area of South Korea were tested to draw the heights on a questionnaire containing 14 triangles and 12 parallelograms with varied positions and shapes. From the study, we could conclude as followings. There is a need to include wordings such as 'the side opposite the vertex' and 'a line containing the base(extended base)' within the definition of heights. The meaning of the words used in the definition and used in everyday life should be clearly discriminated. When teaching the concept of heights in plane figures, teachers should utilize various example and counter-example images based on the errors students frequently make.

Key words: Height of figures, Error Type, Triangle, Parallelogram, Concept Definition, Concept Image

* 교신저자 : 이광호, paransol@knue.ac.kr

** 이 논문은 한국교원대학교 2013학년도 KNUE 학술연구비 지원을 받아 수행하였음.

Received November 15, 2014; Accepted December 10, 2014; Published December 30, 2014
2014. Institute of Brain based Education, Korea National University of Education

I. 서론

수학적 개념 형성은 수학학습에 있어 기본이 되며 차후 학습에 영향을 주므로 교사는 학습자가 학습 초기에 이러한 수학적 개념을 바르게 형성할 수 있도록 지도해야 한다. 이러한 수학적 개념을 지도할 때 교사가 가르치고자 하는 개념정의(Concept definition)와 학습자들이 머릿속에 형성하는 개념이미지(Concept image)간에 차이가 생길 때 학생들의 수학적 개념의 명확화는 어려워진다. 이러한 수학적 개념을 습득하는 과정에서 일어나는 개념정의와 개념이미지 간의 갈등은 여러 원인에 의해 나타나며 교사는 개념정의와 개념이미지 간의 격차로 인해 발생하는 학생들의 인지적 갈등상태를 파악하고, 그러한 갈등 요인을 표면으로 드러내어 이를 해결하도록 하는 것(Kang & Kim, 2007)이 필요하다.

한편, 도형 영역은 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 자연, 건축물, 공간 등과 밀접한 관련을 맺고 있으며 초등학생들이 주변에서 쉽게 접할 수 있는 내용의 수학이라는 측면을 담고 있어 초등수학교육에서 매우 중요하다. 또한 이러한 도형의 기본 개념과 속성들을 이해하는 것은 도형의 둘레, 넓이, 부피 등과 관계되어 측정 영역의 기본 바탕이 된다. 도형 학습에서 학생들은 도형의 높이를 파악하는데 있어 어려움을 겪는다.

Lim & Park (2011)은 6학년 학생들이 도형의 높이 개념을 이해하는 데 있어 밑변이 수평하지 않는 도형의 높이를 측정하는 것에서 어려움을 나타냈고, 일상의 높이 경험과 관련된 오류를 보인다고 하였다. 도형의 높이를 제시하는데 있어서 높이를 내부에만 설정한 오류와 밑변 옆에 있는 변을 높이로 설정하는 오류도 나타났다고 하였다. 또한 평행사변형의 높이 측정에서도 삼각형에서와 유사한 오류를 보인다고 하였다. 그러나 삼각형에서의 오류에 대해 더 다양한 측면을 살펴 볼 때 평행사변형에서의 높이 또한 어떤 면에서 유사한 지 세분화 할 수 있다. 이에 삼각형 높이에 대한 오류를 좀 더 세분화 하여 분류할 필요가 있으며 이와 관련하여 평행사변형의 높이에 대한 오류와 어떤 면에서 유사한지 알아볼 필요가 있다.

Gutierrez & Jaime(1999)는 예비 초등 교사들을 대상으로 삼각형의 높이에 대한 오류를 분석하였으며 높이와 중선을 혼합한 높이 개념 오류, 수직 이등분에 의해 영향을 받은 부분적인 개념 이미지 오류, 외부의 높이를 제외한 불완전한 개념 이미지 오류, 높이의 길이를 고려하지 않는 불완전한 이미지를 반영한 오류, 삼각형의 한 변에 대한 집착을 반영한 오류 등을 보고하였다. 그러나 이 연구는 예비 초등 교사들을 대상으로 하여 초등학생들과는 다른 결과를 보일 수 있어 초등학생들을 대상으로 연구를 실시하여 오류들을 세분화하여 분석할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 삼각형과 평행사변형의 높이에 대한 5학년 학생들의 삼각형과 평행사변형의 높이에 대한 이해도를 파악하고, 학생들이 나타내는 오류 유형을 분석해 보고자 한다.

연구 문제

이상의 연구 필요성과 목적에 따라 본 연구에서는 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

- 가. 삼각형과 평행사변형의 높이에 대한 초등학교 5학년 학생들의 이해도를 파악한다.
- 나. 삼각형과 평행사변형의 높이에 대해 초등학교 5학년 학생들이 나타내는 오류 유형을 분석하여 세분화한다.
- 다. 학생들이 오개념을 나타내는 원인과 그 지도 방안을 Vinner의 개념정의와 개념이미지의 측면에서 파악해 본다.

II. 이론적 배경

도형에 관한 문제를 해결할 때 학생들은 개념정의와 개념이미지를 모두 사용하여 해결하기 보다는 개념이미지만을 가지고 문제를 해결한다(Vinner, 1991). 개념 정의는 개념을 언어적으로 정확하게 표현한 것으로 수학 교과서나 수학 개념사전 등에 제시된 개념에 대한 언어적 표현을 개념 정의라고 할

수 있다. 초등학교 교과서에 제시된 개념 정의는 엄밀한 정의를 이해할 수 있는 능력을 갖추지 못한 초등학생들의 심리적인 과정을 고려하여 가르치려는 의도에 맞게 정의를 내리게 된다(Kwon & Ahn, 2005). 학생들은 이러한 교과서의 개념정의와 그 개념의 예와 반례에 대한 경험, 개인의 이전 경험에 의해 개념이미지를 형성하게 되는데 개념이미지가 개념정의와 일치하지 않을 때 학생들은 오류를 범하게 된다(Lee & Lee, 1998).

Jang (2013)은 초등학생들이 가지고 있는 고정되거나 잘못된 개념이미지가 도형과 관련된 문제를 해결하는 과정에서 나타날 수 있는 오류 중의 하나임을 밝혔다. 학생들은 ‘삼각형의 높이는 내부에 존재한다.’거나 하는 잘못된 개념이미지를 대부분 가지고 있었고, 도형의 일반적인 위치와 형태에 그들의 개념을 한정시키는 경향이 있어서 그들이 알고 있는 형태의 높이나 밑변만으로 문제를 해결하려고 그 외에 제시된 높이나 밑변은 그 도형의 밑변과 높이로 인식하지 못하는 경향이 있었다. Lim & Park (2011)은 6학년 학생들이 도형의 높이 개념을 이해하는 데 있어서 나타나는 특징과 오류 유형을 분석한 결과, 학생들은 평면도형의 높이 측정에서 밑변이 수평하지 않은 도형에서 어려움을 나타냈고, 일상의 높이 경험과 연관되는 오류를 보이고, 높이 개념을 언어적으로 표현하는데 어려움을 느끼고 있음을 밝히고 교과서에 다양한 각도의 형태로 도형을 제시하고, 높이라는 용어는 일상생활에서도 사용하는 용어이므로 수학에서의 높이 개념과 혼동하지 않도록 일상생활에서의 높이와 비교하여 수학적 개념으로서의 정의를 명확하게 해야 한다고 하였다.

2007 개정 수학교과서와 다른 나라의 삼각형 높이에 대한 개념정의와 개념들의 예는 다음과 같다. 2007개정 수학교과서(MOEST, 2011)에서는 삼각형의 높이를 “삼각형 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 을 밑변이라 하고, 꼭짓점 A 에서 밑변에 수직으로 그은 선분 AD 을 높이”라고 한다고 정의하고 Lee(2010)는 수학용어사전에서 “The length of a line segment from a vertex of the triangle to the side opposite the vertex, drawn perpendicular to that side(한 꼭짓점으로부터 반대편에 있는 변까지 수직으로 잇는 선

분의 길이)”라고 정의하고 있으며, 스페인 교과서에서는 “Altitude of a triangle is the segment from a vertex and perpendicular to the opposite side or to its elongation(한 꼭짓점으로부터 반대편에 있는 변 또는 그 변의 연장선에 수직인 선분)”이라고 정의하고 있다(Gutierrez & Jaime, 1999, 재인용). Wikipedia(2014)에서는 삼각형의 높이를 “In geometry, an altitude of a triangle is a line segment through a vertex and perpendicular to (i.e. forming a right angle with) a line containing the base (the opposite side of the triangle). This line containing the opposite side is called the extended base of the altitude(기하학에서, 삼각형의 높이는 꼭짓점을 지나고 밑변을(삼각형에서의 맞변) 포함하는 직선에 수직인(즉 직각을 이루는) 선분이다. 맞변을 포함하는 이 직선은 높이에 대한 밑변의 연장선이라고 한다.)”라고 정의하고 있다.

위에서 살펴본 다른 나라의 삼각형 높이에 대한 정의는 2007개정 수학교과서에서의 정의와는 다르게 밑변을 반대편에 있는 변으로 표현하였고 “연장선”이라는 단어를 사용하여 높이를 정의하고 있다. 2007개정 수학교과서에서 삼각형 높이에 대한 정의와 함께 제시된 예를 살펴보면 밑변이 교과서의 하단부와 수평한 높이만을 예로 제시하였으며 반례를 제시하지 않았다. Wikipedia의 경우 삼각형의 세 변이 모두 밑변이 될 수 있음을 보여주고 각 밑변에 대한 높이를 예로 제시하였다.

일상생활에서 국어적으로 사용하는 용어가 수학에서 개념을 정의할 때 사용될 경우 그 의미를 명확히 하지 않으면 오히려 개념을 형성하는데 장애가 되는 경우가 있다(Hyun, 1999). 기하영역에서 사용하는 밑변과 밑면이라는 용어에서 사용된 “밑”이라는 용어는 일상적으로 “물체의 아래나, 아래쪽”을 의미하는 것과는 다른 의미로 사용된다. 이에 5학년 학생들의 높이 개념에 대한 오류 분석을 통하여 교과서에 제시된 정의와 예들 그리고 일상용어와의 의미 차이가 오류의 원인이 되는지 살펴볼 필요가 있다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 연구자가 근무하는 지역과 가까운 충청남도 천안시, 세종시, 대전시에 위치한 6개교 5학년 학생 433명을 대상으로 실시하였으며 특수 교육 대상자는 제외하였다.

2. 연구 방법 및 절차

삼각형과 평행사변형 높이 개념에서 나타나는 오류 유형을 파악하기 위해서 사용한 검사지는 Gutiérrez와 Jaime (1999)가 예비교사들을 대상으로 실시한 삼각형의 높이 개념에 대한 이해라는 연구에서 사용한 검사지를 연구자들의 상의와 수정·보완을 통하여 작성되었다. 이 검사지는 삼각형 높이에

관한 문항 14개, 평행사변형 높이에 관한 문항 12개로 재구성되었으며 평가지의 문항 구성과 내용은 <표 1>과 같다.

본 연구를 위하여 2013년 9월에 1차 검사지를 개발하여 학생들에게 투여하여 반응을 살펴 2014년 9월에 검사지를 재구성하여 학생들에게 삼각형과 평행사변형의 높이를 그리도록 하였다. 학생들이 문제를 해결할 때 교사는 문항에 관하여 어떤 힌트도 주지 않도록 하였으며 시간은 제한을 두지 않았다. 문제를 해결할 때 높이를 그려야 하기 때문에 학생들에게 자를 사용하게 하였다.

검사 결과는 삼각형과 평행사변형의 높이 그리기에 대하여 연구자들 각각이 검사지의 결과를 분석하여 오류유형을 분류한 후 논의를 거쳐 오류유형을 통합하였다. 오류 유형을 통합한 후 문항별 정답률과 오류 유형을 분석하였으며 오류 유형 분석을 토대로 삼각형과 평행사변형의 높이 개념 오류에서의 유사성을 조사하였다.

<Table 1> The content and composition of questions

문항 번호	삼각형 문항 내용				문항 번호	평행사변형 문항 내용		
	밑변과 하단부와의 관계	삼각형 모양	밑변	높이		밑변과 하단부와의 관계	밑변	높이
1	평행	예각삼각형	가장 긴 변	내부	1	평행	긴 변	내부
2	수직	예각삼각형	가장 긴 변	내부	2	기울어짐	짧은 변	외부
3	수직	예각삼각형	가장 긴 변	내부	3	기울어짐	짧은 변	외부
4	평행	예각삼각형	가장 긴 변	내부	4	기울어짐	짧은 변	외부
5	평행	직각삼각형	가장 긴 변	변	5	평행	짧은 변	내부
6	기울어짐	예각삼각형	가장 긴 변	내부	6	기울어짐	짧은 변	내부
7	수직	둔각삼각형	가장 짧은 변	외부	7	평행	짧은 변	내부
8	기울어짐	둔각삼각형	가장 짧은 변	외부	8	기울어짐	짧은 변	외부
9	수직	직각삼각형	중간 길이 변	변	9	기울어짐	짧은 변	외부
10	기울어짐	둔각삼각형	가장 긴 변	내부	10	평행	짧은 변	외부
11	평행	예각삼각형	가장 긴 변	내부	11	기울어짐	짧은 변	내부
12	평행	둔각삼각형	가장 짧은 변	외부	12	기울어짐	짧은 변	외부
13	기울어짐	직각삼각형	중간 길이 변	변			짧은 변	
14	평행	둔각삼각형	가장 짧은 변	외부				

IV. 결과

본 연구에서 학생들에게 평면도형의 높이 이해 검사지를 투여한 결과 학생들이 보이는 오류 유형을 다음과 같이 크게 7가지로 분류하였다. 수선으로 그리지 않는 경우, 꼭짓점이 아닌 밑변의 꼭짓점으로부터 높이를 그리는 경우, 밑변이 아닌 다른 변에 대하여 높이를 그리는 경우, 도형의 한 변을 높이로 생각한 경우, 높이의 길이를 정확하게 제시하지 못한 경우, 무응답, 그리고 평행사변형에서 대각선을 그리는 경우로 나누었다. 이를 통해서 볼 때 삼각형에서 보이는 높이의 오류와 평행사변형에서 보이는 높이의 오류가 유사하게 나타남을 알 수 있다. 기존의 연구에서는 언급하지 않았던 도형의 내부에 높이의 일부만 표시하는 오류(분류코드B), 제시한 밑변이 아닌 다른 변에 대한 바른 높이(분류코드C-1) 또는 바르지 않는 높이(분류코드3-2)에 대한 오류, 제시된 밑변의 연장선을 그려 도형의 외부에 높이를 그리지 못하는 오류(분류코드A-1)를 포함하여 다음 <Table 2>와 같이 본 연구의 오류유형을 범주화하였다.



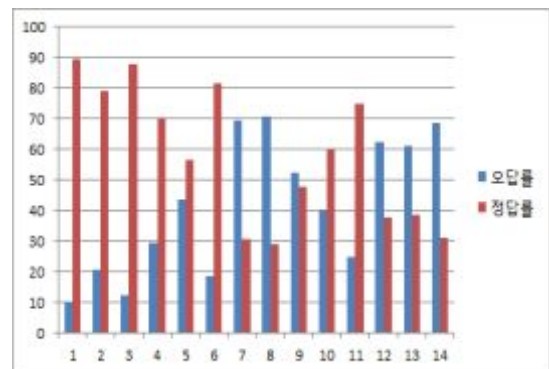
<Fig. 1> The error rate according to the error types for heights in triangles



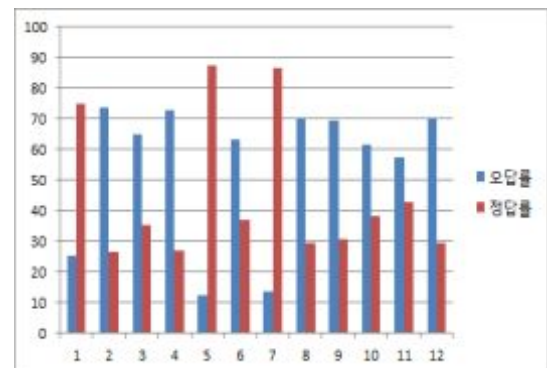
<Fig. 2> The error rate of according to the error types for heights in parallelograms

또한 <Fig. 1>과 <Fig. 2>에서 이들 유형의 빈도를 알 수 있다. 삼각형의 경우 코드 A-2와 B-1의 오류 발생률이 크고 평행사변형의 경우 A-2와 G의 오류 발생률이 크다는 것을 알 수 있다.

다음은 오류를 분석한 후 각 문항별 오답률을 검사하였다. 삼각형 높이 이해 검사 결과 정답률은 전체적으로 58.2%로 나타났고, 평행사변형은 45.4%로 나타났다. 이것으로 볼 때 학생들은 삼각형보다 평행사변형의 높이를 구하고 찾는 데 더 많은 어려움을 가지고 있는 것으로 드러났다. <Fig. 3>에서 삼각형의 높이를 구하는데 있어 많은 오답률을 보이는 문항은 7, 8, 12, 13, 14번으로 밑변이 사선으로 놓인 경우나 짧은 변을 밑변으로 제시한 경우이다. <Fig. 4>에서 평행사변형의 경우에는 1, 5, 7번을 제외한 다른 모든 문항에서 높은 오답률을 보이고 있다.

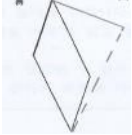
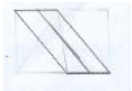
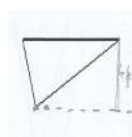
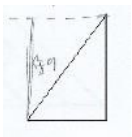
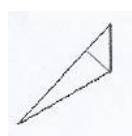
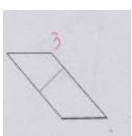
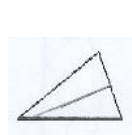
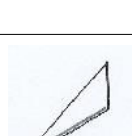
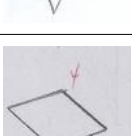
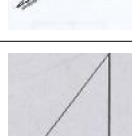
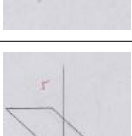
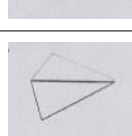
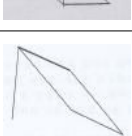
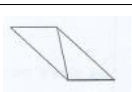


<Fig. 3> Percentage of correct answers per questions for the height of triangle



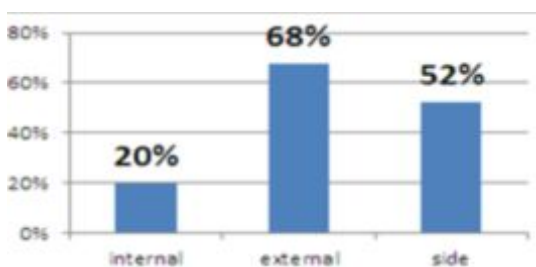
<Fig. 4> Percentage of correct answers per questions for the height of parallelogram

<Table 2> The error types students have about heights

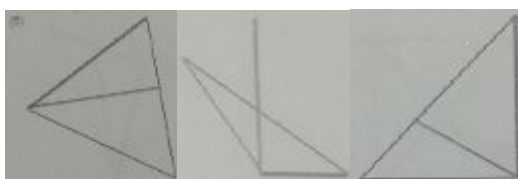
분류코드	오류 유형에 대한 설명	오류의 예	
A-1	꼭짓점에서 밑변에 높이를 그리려고 했으나 수선으로 그리지 않은 유형(평면도형 외부에 높이를 그림)		
A-2	꼭짓점에서 밑변에 높이를 그리려고 했으나 수선으로 그리지 않은 유형(평면도형 내부에 높이를 그림)		
B-1	꼭짓점을 지나는 연장선을 그려 꼭짓점이 아닌 연장선의 한 점에서 높이를 그린 유형		
B-2	밑변의 한 꼭짓점에서부터 높이를 수선으로 그어 평면도형의 내부에 높이를 그린 유형		
B-3	꼭짓점이 아닌 밑변의 한 점에서부터 높이를 수선으로 그어 평면도형의 내부에 높이를 그린 유형		
C-1	밑변이 아닌 다른 변에 대한 높이를 바르게 그린 유형		
C-2	밑변이 아닌 다른 변에 대한 높이를 그렸으나 수선으로 그리지 않은 유형		
D	높이가 아닌 도형의 다른 한 변을 높이로 생각한 유형		
E	밑변에 수직이면서 꼭짓점을 지나는 직선 형태로 그린 유형		
F	기타 유형 (무응답 포함)		
G	대각선을 그린 유형(평행사변형만 포함)		

이는 교과서에서 자주 보이는 유형과 직사각형인 경우에는 정답률이 높으나 그 외에는 오답률이 높은 것을 알 수 있다. 특히 평행사변형의 경우 오류 유형7의 빈도가 전체 오류 발생 빈도의 27.6%로 평행사변형 이해 검사의 평균정답률에 큰 영향을 미치고 있는 것으로 분석되었다. 이는 많은 학생들이 평행사변형의 높이를 대각선으로 인식하고 있다는 것을 알 수 있다.

<Fig. 5>와 <Fig. 6>을 통하여 평면도형에서 높이가 그려질 수 있는 위치에 대한 학생들의 이해도를 알 수 있다. <Fig. 5>는 높이가 그려질 수 있는 위치가 각각 삼각형의 내부, 외부, 변에 위치할 때의 문항 오답률이며, <Fig. 6>은 대표적인 오류를 나타낸 것이다. 삼각형의 경우 높이가 도형의 내부에 그려지게 되는 경우의 오답률은 19.9%로 가장 낮고, 직각삼각형으로 높이가 한 변과 일치하는 경우는 52.3%, 둔각삼각형으로 도형의 외부에서 찾아야 하는 경우에는 67.8%로 가장 높게 나타났다.



<Fig. 5> Frequency of errors according to the position of heights



<내부internal> <외부external> <변side>

<Fig. 6> Examples of heights of different positions

이러한 결과를 보이는 까닭은 기존 학생들이 가지고 있는 삼각형의 높이에 대한 개념 이미지의 형성에 교과서에서 제시되는 예처럼 주로 삼각형의

내부에 높이가 위치하는 경우를 통하여 학습한 결과로 생각하여볼 수 있으며, 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형에서의 높이의 다양한 정례를 학생들에게 제시하고, 특히 밑변의 연장선을 그려 높이를 구해야 하는 형태를 학습하는 경험을 하게 할 필요가 있다.

<Fig. 7>과 <Fig. 8>을 통하여 평면도형에서 밑변으로 제시한 변의 길이와 학생들이 가지고 있는 평면도형의 높이 개념과의 관계를 알 수 있다. <Fig. 7>은 삼각형에서 가장 긴 변을 높이로 제시한 문항과 그렇지 않은 문항의 오답률을 나타내었고, <Fig. 8>은 오류의 대표적인 예를 보인 것이다. 정삼각형의 경우의 정답률은 86.3%로 평균보다 훨씬 높은 결과를 보이고 있다. 하지만 밑변의 길이와 오답률의 관계를 살펴보면, 삼각형에서 가장 긴 변을 밑변으로 제시한 경우는 38.9%이나, 그렇지 않은 변이 밑변으로 주어졌을 때에는 67.8%로 상대적으로 높은 오답률을 보이고 있다. 이는 평면도형의 높이에 대한 개념정의와 학생들이 가지고 있는 개념 이미지 간의 인지적 불일치에서 발생한 것을 큰 원인으로 생각하여 볼 수 있다. 임의의 한 삼각형에서도 3가지의 높이가 존재하고, 주어지는 꼭짓점과 밑변에 따라 각각 그 높이를 구할 수 있다고 생각하지 못하는 것과 관련지을 수 있다.



<Fig. 7> Frequency of errors according to the length of the baseline

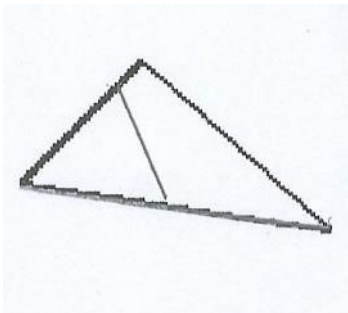


가장 긴 변 가장 짧은 변

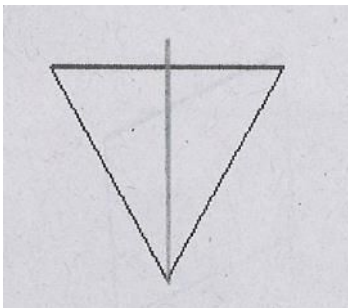
<Fig. 8> Examples of baselines of various length

이해 검사에서 제시한 밑변의 위치가 검사지 위

치와 수평 또는 수직인 경우는 각각 61.1%, 61.4%로 평균정답률보다 높으나, 사선에 위치하는 경우 52.3%로 평균정답률보다 낮은 특성을 보이고 있다. 이는 높이라는 단어가 일상용어에서 쓰일 때의 뜻과 관련하여 학생들이 바라볼 때의 아래, 또는 밑과 혼동하여 발생하는 것을 원인으로 생각하여 볼 수 있다. 그것이 사용되는 상황에 대한 이해로부터 수학적 개념 사이에 혼동을 가지고 있는 것으로 보인다. <Fig. 9>는 제시한 밑변에 대한 높이이해 검사지에서 밑변이 사선에 위치하여 밑변에서 높이를 구하려고 시도하였으나 올바른 꼭짓점과 연결하지 못하여 나타내는 오류를 범하는 예이다. <Fig. 10>은 삼각형의 밑변이 수평으로 놓여 있지만, 일반적인 삼각형 모양과 반대로 놓여있어 높이를 꼭짓점에서 맞은편 변(또는 그 연장선)을 넘어서까지 수직으로 나타낸 오류를 범한 예이다



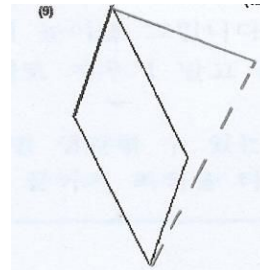
<Fig. 9> Sample of a wrong answer due to the position of baseline(1)



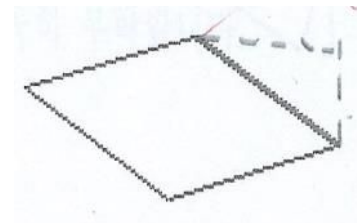
<Fig. 10> Sample of a wrong answer due to the position of baseline(2)

<Fig. 11>, <Fig. 12>, <Fig. 13>은 평행사변형에서 밑변에 연장선을 그어 높이를 구하는 전략이 불완전한 예이다. <Fig. 11>는 제시한 밑변과 마주보는 변의 연장선을 바르게 그리지 못하는 오류이고, <Fig. 12>은 밑변과 평행한 변과의 관계에서

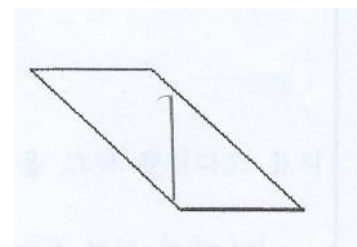
높이를 찾지 못하는 오류이다. <Fig. 13>은 수직으로 그려서 구해야한다는 점을 알고 있었으나, 높이를 그리던 중 도형의 외부에 높이가 위치할 수 있게 평행한 변에서 연장선을 그어 그 연장선으로 높이를 만나게 하지 못하여 오류를 범한 예이다. 평행사변형의 경우 직각을 가지고 있는 도형들의 이해 검사 결과는 평균정답률의 2배 가까이 87%의 높은 정답률 보이지만, 높이를 도형의 내부에 그릴 수 있는 경우는 51.5%이고, 외부에 연장선등을 그려 나타내야하는 경우의 정답률은 30.9%로 매우 낮다. 이는 연장선을 그려서 높이를 구하는 과정을 정확히 이해하고 있지 못하다는 것을 알 수 있다.



<Fig. 11> sample of a wrong answer using extension line (1)



<Fig. 12> Sample of a wrong answer using extension line (2)



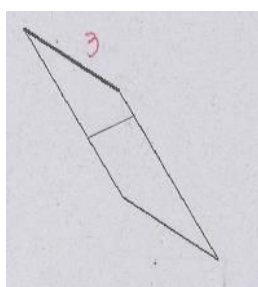
<Fig. 13> sample of a wrong answer using extension line (3)

<Fig. 14>, <Fig. 15>, <Fig. 16>, <Fig. 17>은

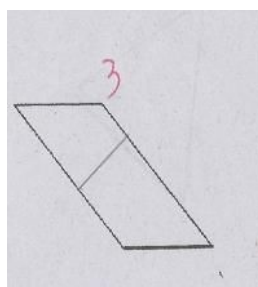
평행사변형에서 제시한 밑변에 대한 높이가 아닌 다른 변에 대한 높이를 구하려고 시도한 예이다. 이들 평행사변형에서 제시한 밑변에 대한 높이를 그리게 될 경우 모두 높이가 모두 도형의 외부에 위치하게 되어 연장선을 그어 높이를 구해야만 한다. 이러한 오류를 범하는 원인 중 한 가지는 평행사변형의 높이가 도형의 내부에만 위치한다는 잘못된 개념이미지를 가지고 있기 때문이라 볼 수 있다. 이웃하는 변의 길이가 다른 평행사변형의 경우 길이가 긴 변이 밑변으로 주어졌을 때와 짧은 변이 밑변으로 주어졌을 때의 정답률은 58.8%와 42.7%로 지정한 밑변의 길이에 따라 정답률이 차이가 난다는 것을 보이고 있다. 즉 학생들은 평행사변형의 긴 변만을 밑변으로 인식하여 문제를 해결하려는 경향을 볼 수 있다. 이는 학생들이 평행사변형의 높이를 구할 때 사용한 개념 이미지와 교수학습을 통해서 학생들에게 인지시켜주어야 할 개념 정의가 일치하지 못하여 나타나는 현상이라고 할 수 있다. 따라서 이러한 오류를 보이는 평행사변형의 예를 학습해야

할 정례로 제시할 필요가 있다.

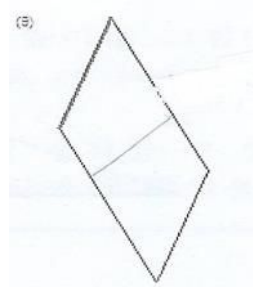
<Table 3>은 삼각형과 평행사변형에서 많이 발생한 오류의 대표적인 예와 오류 유형에 대한 설명을 나타내었다. 그 중 평행사변형에서 유독 높게 나타나는 오류는 일관되게 도형의 대각선을 높이로 표시하는 경우(평행사변형 오류발생량의 27.6%)이다. 이 오류 유형은 대각선을 그릴 수 없는 삼각형에서는 해당되지 않으므로 이를 제외하고 두 도형에서 공통으로 나타나는 오류를 살펴보면 다음과 같다. 두 평면도형에서 공통적으로 높은 빈도를 보이는 오류는 내부에 수직이 아닌 선으로 연결하는 유형(삼각형 오류발생량의 25.4%, 평행사변형 오류발생량의 40.7%)이다. 이는 도형의 높이가 도형의 내부에만 위치한다는 개념적 정의에 오류를 가지고 있는 것으로 생각되며, 이러한 오류를 범한 학생들은 많은 문항에 일관된 오류를 나타내고 있어 다양한 범주의 예를 제시하여 수정보완 될 수 있는 교수지원이 필요하겠다.



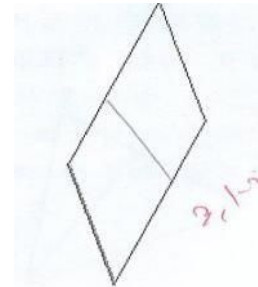
<Fig. 14> Sample of a wrong answer due to length of baseline (1)



<Fig. 15> Sample of a wrong answer due to length of baseline (2)

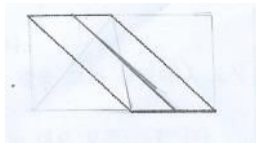


<Fig. 16> Sample of a wrong answer due to length of baseline (3)



<Fig. 17> sample of a wrong answer due to length of baseline (4)

<Table 3> Typical error types of heights in triangles and parallelograms

삼각형		평행사변형	
예시	오류 유형	예시	오류유형
	[1-2]밑변으로부터 높이를 그렸지만 수선으로 그리지 않은 유형 (삼각형 내부에 높이를 그림)		[1-2]밑변으로부터 높이를 그렸지만 수선으로 그리지 않은 유형 (평행사변형 내부에 높이를 그림)
			[7] 대각선을 그린 유형

V. 결론 및 제언

선행연구에서 밝혀진 바와 같이 삼각형과 평행사변형의 높이에 대해 학생들은 다양한 유형의 오개념을 지닌다. 본 연구에서는 충청지역 433명의 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 그들이 빈번하게 오개념을 드러내는 평면도형의 형태와 오류 유형을 보다 구체적으로 분석하여 보고, 학생들이 오개념을 나타내는 원인과 그 지도 방안을 Vinner의 개념정의와 개념이미지의 측면에서 파악해 보고자 하였다. 이를 토대로 우리가 얻을 수 있는 결론은 다음과 같다.

첫째, 삼각형이나 평행사변형의 높이를 정의할 때 ‘맞변’과 ‘밑변의 연장선’이라는 용어를 사용해야 할 필요가 있다. 학생들이 삼각형과 평행사변형의 높이를 그릴 때 밑변의 연장선을 그려야 하는 형태에서 오답율이 높았다. 이는 2009개정 교육과정에 따른 교과서에서 삼각형의 높이에 대해, ‘삼각형에서 한 변을 밑변이라고 하면 밑변과 마주 보는 꼭짓점에서 밑변에 수직으로 그은 선분을 높이라고 합니다.’라고 정의를 하고 있다. 이는 wikipedia나 스페인의 교과서에서의 삼각형의 높이에 대한 정의와 비교해 보았을 때, 연장선에 대한 개념이 정의에 포함되지 않아 개념 정의와 개념이미지의 불일치로 인하여 오개념이 유발된다고 할 수 있다.

둘째, 개념 정의에서 사용하는 용어와 일상에서 사용하는 용어의 의미의 차이를 분명하게 인식시켜야 한다. 본 연구에서 밑변의 길이가 가장 긴 변이 아니거나, 밑변의 위치가 수평 또는 수직으로 배치되지 않은 도형의 높이를 그릴 때 오답율이 높았다. 이는 높이의 정의에서 제시한 용어인 ‘밑변’에서 ‘밑’의 일상적인 의미인 ‘아래’ 또는 ‘토대’와 혼동되어 나타난 것으로 보인다. 따라서 학생들에게 밑변에서의 밑은 꼭 아래나 토대란 뜻으로 사용되는 것이 아니라는 것을 강조해야 할 필요가 있다.

셋째, 평면도형의 높이 개념 지도에서 학생들의 오류를 고려한 정례와 반례를 다양하게 제시해야 한다. 평면도형의 높이 그리기에서 삼각형의 경우 14개의 과제 중 6개의 과제에서, 평행사변형의 경우 12개의 과제 중 9개의 과제에서 오답율이 50% 이상

나타났다. 이를 통해 학생들에게 평면도형의 높이에 대해 지도할 때, 오답율이 높게 나온 평면도형의 형태를 정례로서 다양하게 제시하여 학습시킬 필요가 있음을 알 수 있다. 또한 삼각형의 오류 유형은 5가지로 꼭짓점에서 밑변에 높이를 그리려고 했으나 수선으로 그리지 않은 경우, 꼭짓점이 아닌 점에서 높이를 그린 경우, 밑변이 아닌 다른 변에 대해 높이를 그린 경우, 높이가 아닌 도형의 다른 한 변을 높이로 본 경우, 높이를 선분이 아닌 직선 형태로 그린 경우가 있다. 평행사변형의 오류 유형은 6가지로 삼각형에서 보인 5가지 오류 유형과 함께 대각선을 높이로 그린 경우가 한 가지 더 추가된다. 이를 통해 학생들에게 평면도형의 높이에 대해 지도할 때, 학생들에게 빈번히 나타나는 오류 유형에 해당하는 이미지를 반례로서 다양하게 제시하여 학습시킬 필요가 있음을 알 수 있다.

이와 같이 평면도형의 높이에 대해 충청 지역의 5학년 학생들이 갖는 오개념을 확인하고 이의 원인과 해결 방안을 개념 정의와 개념 이미지의 측면에서 확인해 보았다. 이 과정에서 삼각형과 평행사변형의 높이에 대해 학생들이 나타내는 오류 유형의 유사하게 나타났다. 이를 토대로, 학생들이 삼각형의 높이에 대해 지닌 오개념을 바르게 수정해 주었을 때 그 학습이 평행사변형의 높이에 대한 바른 개념으로 학습전이가 일어날 수 있는지에 대해 후속연구를 통해 알아볼 수 있을 것이다.

참고 문헌

- The Ministry of Education (2011). Teachers' guidebook for 5-1 mathematics. Seoul: Korean National University of Education National Textbook publishing committee.
- Kang, O. & Kim T. (2007). A study on the differences between the concept definition and concept image of 7th grade students: Focused on the part of function.. Educational Research, 6(1), 91-125.

- Kwon, Y. & Ahn, B. (2005). The analysis on students' understanding of mathematics terms being used in elementary school mathematics textbooks- Centering on the field of geometry. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 9(2), 137-159.
 - Noh, Y. & Ahn, B. (2007). An analysis on error of fourth grade student in geometric domain. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 11(2), 199-216.
 - Lee, E. (2010). *Mathpedia*. Seoul: Nexus.
 - Lee, J. & Lee, N. (1998). A study on geometric concept images. *Journal of Research in Curriculum Instruction*, 2(1), 86-107.
 - Lim, S. & Park, Y. (2011). A study on the understanding of height concept of figures of sixth grade students of elementary schools. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 15(1), 141-159.
 - ChangYoungEun (2013). An analysis on errors of elementary school students in geometric problem solving process. Unpublished master's thesis, Jeonju National University of Education, Jeonju, Korea.
 - Hyun, J. (1999). Elementary school mathematics education theory reflected 7th curriculum. Seoul; HakMunSa.
 - Gutierrez, A. & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 253-275.
 - Vinner, S.(1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
 - Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
 - Wikipedia. (2014, November). Retrived November 20, 2014. from [http://en.wikipedia.org/wiki/Altitude_\(triangle\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Altitude_(triangle))
- Electronic refrence formats recommended by the